關孝和與祖沖之的邂逅

國立台灣師範大學數學系研究生 黃俊瑋

一、前言

在西方數學史上，偉大的阿基米德（**Archimedes, 285?-212 BCE**），從圓內接正方形出發，邊數逐次加倍，最後，先是證明了圓面積與兩股分別為此圓半徑與圓周長的值解三角形面積相等，再利用圓外切與內接正 **96** 邊形，證明了 $3\frac{10}{70}<\pi<3\frac{11}{70}$。而後，海龍（**Heron**）讓 **22/7** 這個值廣泛地使用在許多實用的書籍中。而大約西元 **150** 年，希臘的天文學家托勒密使用 **377/120** 作為近似值。大約西元 **530** 年的印度，數學家阿耶波多則是使用 **62832/20000** 為近似值。[1]在中算史這一方面，三國時代的趙爽在其《周髀算經》注之中，即指出「**圓徑一而周三，方徑一而匝**」，而劉徽注《九章算術》時，先是證明了圓面積等於半周半徑相乘，再進一步指明圓周與直徑之關係，並非「**周三徑一**」之率。同時，他利用割圓術得到「**周率一百五十七，徑率五十**」。

至於有關祖沖之的相關貢獻，我們則可以徵之於《隋書》記載：

> **圓周率三，圓徑率一，其術疏舛。自劉歆、張衡、劉徽、王蕃、皮延宗之徒，各設新率，未臻折衷。宋末南徐州從事史祖沖之更開密法，以圓徑一億為一丈，圓周數盈數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒七忽，朒數三丈一尺四寸一分五釐九毫二秒六忽，正數在盈朒二限之間。密率：圓徑一百一十三，圓周三百五十五；約率：圓徑七，圓周二十二。**

顯然，西元五世紀的祖沖之，已經利用其密法，[2]求得了圓周率介於 **3.1415926** 與 **3.1415927** 之間。當然其中的「**密率：圓徑一百一十三，圓周三百五十五**」和「**約率：圓徑七，圓周二十二**」，亦是圓周率的兩個重要而簡單的近似分數。

「圓周率」近似值的探求，是各個文明之中的重要而待解的數學問題。有關圓周與直徑的比值，數學家們無法逃避地必需面對以下兩個問題：**1.** 這個比值是一個定值 **(**即常數**)** 嗎？**2.** 如何求得其切確的或近似的值？數學家必須先了解圓周率是一個定值之後，求其值或求值的方法才有意義。就如同祖沖之一樣，他勢必了解圓周與直徑之比值為一定值，才大膽地以「**圓徑一億為一丈**」的方式，以方便增加更多邊形的邊數來割圓求其周長，進而計算圓周率。而祖沖之所發現，這個既簡單卻又準確的近似分數，也受到中國古代曆算家的重視與應用。[3]

---

[1] 參考洪萬生、英家銘等譯，《溫柔數學史》(2008)，頁 109。
[2] 亦為割圓術。
[3] 例如劉歆制定《三統曆》時，就利用此一方法。

二、「算聖」關孝和與圓周率

從上述故事，不難發現，圓的測量 (求圓周率) 一直是中國或其它國家的數學家們相當感興趣的問題，當然，日本的和算家們也不例外，其中，最重要的和算家，同時又被譽為「算聖」的關孝和，應該也會對如何更精確地計算圓周率的近似值感興趣才是。

在十七世紀前半葉的和算書中，多數以 **3.16** 或 $\sqrt{10}$ 作為圓周率，直到 **1663** 年村樹茂清的《算俎》開始才有變化，他利用割圓術從正四邊形割至正 2^{15} 邊形，得圓周率近似值 **3.1415926**。[4]關孝和則於《規矩要明算法》**(1662~1672** 不詳**)**，利用相同的割圓術來求圓周率，割至正 2^{15} 邊形，得近似值 **3.1415926**，後來，又在《八法略訣》**(1680** 年**)**與《括要算法》**(1712)**之中，[5]得到更精確的近似值。[6]

至於關孝和如何處理求圓周率的問題呢？在他的《括要算法》貞卷，他提出了下列的「**求圓周率術**」:

> **求圓周率術**
>
> **假如有圓，滿徑一尺，則問圓周率若干。**
>
> **答曰：徑一百一十三，周三百五十五。**
>
> **依環矩術，得徑一之定周，而以零約術，得徑一百一十三，周三百五十五，合問。**[7]

由此段可知關孝和求圓周率的方法主要分成兩個步驟，第一，先對直徑為一尺的圓，利用割圓術求得該圓圓周的近似值；[8]第二，透過先前亨卷中的零約術對圓周與直徑的比值進行有理數的逼近。

首先，問題為假設圓的直徑為一尺，再問圓周率為何？當然，從後見之明來看，圓周率既為一常數，即不隨著圓的直徑大小而改變，關孝和顯然亦有此認知。因此，他以類似祖沖之的求解進路來求近似值。於是，他先在問題中首先假設了「**圓，滿徑一尺**」。接著，關孝便在「答曰」中，先給出了他所挑選出的答案:「**徑一百一十三，周三百五十五**」，此即為圓周與直徑之間的比例關係。然後，關孝和便提出解決此問題的「術」**(**方法**) --**「**環矩術**」，[9]利用求圓內接正多邊的方式，進而求得徑一尺時的「**定周**」長。[10]從「**定周**」兩字的用詞來看，[11]亦佐證他應

---

[4] 參考馮立昇 (2009)，《中日數學關係史》，頁 147。

[5]《括要算法》為關孝和死後，由其門內傳人大高由昌於 1712 年刊刻。

[6] 參考劉雅茵 (2011)，《關孝和《括要算法》之內容分析》，頁 123~126。

[7] 引自徐澤林 (2008)，《和算選粹》，頁 220。

[8] 引自劉雅茵 (2011)，《關孝和《括要算法》之內容分析》，頁 117。然而，關孝和所得的「定周」並非單純利用割圓術的結果，而是在割至 2^{17} 邊形後，使用了「增約術」。

[9] 環矩術即為割圓術。

[10] 關孝和求得圓徑一尺之定周為三尺一寸四分一釐五毫九絲二忽六微五纖三沙五塵九埃微弱，即　其求得圓周的近似值為 3.14159265359。建部賢弘在《綴術算經》中提到關孝和以增約術求定周，「究得十五六位之真數矣」，然事實上，就關孝和在《括要算法》所列之「定周」與 π 相比，僅準確到小數點後十位。

當了解當直徑固定之後，圓的周長也隨之固定，即兩者的比值 － 圓周率亦為一定值。所以，題目中假設了「滿徑一尺」的用意，或許是為了割圓計算定周長 (即直徑為一尺的圓之圓周長) 上的方便，並為了利用當時的長度單位，進一步了解可以逼近「圓周率」到什麼程度而設。

在緊接的「第二，求定周」之中，他便進一步利用了「增約術」計算出定周為「三尺一寸四分一釐五毫九絲二忽六微五纖三沙五塵九埃微弱」。按此數據來看，他所計算出的圓周率，準確到小數點後十位。而後，他便把「定周」這個近似值當作π來使用。有了此定周之後，再依「零約術」，進而求得了分母從一至一百一十三，共 **113** 個圓周率的近似分數，其中，最後一個「周率三百五十五，徑率一百一十三」是最接近「定周」的周徑之率，此即為關氏心中所滿意的答案。

接下來，他提出如何求圓面積的方法：

> **求積者，列圓徑冪，以周率三百五十五相乘，得數為實，列徑率一百一十三，四之，得四百五十二為法，實如法為一，得圓滿之積而已。**[12]

上文的意思即為：圓面積等於圓的直徑的平方，乘上 **355**，再除以 **4** 倍的 **113**，亦即圓面積等於圓的直徑的平方乘上圓周率再除以 **4**。這等價於現代中小學教科書中的常用公式，也顯示出有別於中國傳統「半周乘半徑」或「周徑相乘四而一」的特色。

以上便是關孝和的「求圓周率術」之相關問題與求解的方法概要。接下來，關孝和便開始著手說明如何利用「環矩術」來求得「定周」，進而得到圓周率近似值的方法與過程，以及他在《括要算法》貞卷所列出的 **113** 個圓周率的近似分數。

三、關孝和之圓率解

在《括要算法》之中，關孝和求圓周率的方法如下：

> **圓率解**
>
> **徑一尺圓內如圖容四角，次容八角，次容十六角，次容五十二角。次第如此，至一十三萬一千零七十二角，各以勾股術求弦，以角數相乘之，各得截周。**

[11] 然而，這裡值得注意的是，關孝和的「定周」，並指的並非等於π，而是其使用了「增約術」以求得更準確的近似值。

[12] 引自徐澤林 (2008)，《和算選粹》，頁 220。

各所得勾、股、弦及周數列於後。[13]

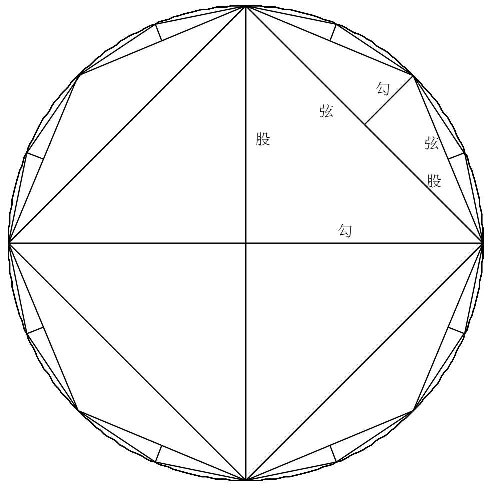

圖 3-1 環矩圖

四角

勾、五寸

股、五寸

弦、七寸〇七一〇六七八一一八六五四七五二四四微強

周、二尺八二八四二七一二四七四六一九〇〇九七六微強

八角

勾、一寸四六四四六六〇九四〇六七二六二三七八微弱

股、三寸五三五五三三九〇五九三二七三七六二二微強

弦、三寸八二六八三四三二三六五〇八九七七一七強

周、三尺〇六一四六七四五八九二〇七一八一七三八強

……

十三萬一千〇七十二角

勾、五厘七四四八六五八六二弱

股、二絲三九六八四四九八〇一五三三四強

弦、二絲三九六八四四九八〇八四一八二強

周、三尺一四一五九二五三二八八九九二七七五九弱[14]

從上述引文和圖 **3-1** 所示，我們可以發現關孝和求圓周率的方法「**環矩術**」，即為所謂的割圓術。首先，他給定一直徑為一尺的圓，接著造「四角」，即作圓內接正四邊形，求得「勾」、「股」與「弦」(即此正四邊形的邊長)，再將「弦」乘以四倍，即得周 (即圓內接正四邊形的周長)。接著，再造「八角」即作圓內接正八邊形，再求得相對三角形之「勾」、「股」與「弦」(即此正八邊形的邊長)，再將「弦」乘以八倍，即得周 (即圓內接正八邊形的周長)。如此，繼續割圓，依序造出正 2^n 邊形，直到造出「十三萬一千〇七十二角」，即內接正十三萬一千〇七十二邊形，求得弦長 (即內接正十三萬一千〇七十二邊形之邊長) 為二絲三

[13] 引自徐澤林(2008)，《和算選粹》，頁 220。

[14] 引自徐澤林 (2008)，《和算選粹》，頁 220-224。此即為關孝和從正四邊形、正八邊形、正十六邊形共割至正十三萬一千〇七十二邊形，並各求得其對應的勾、股、弦、周之近似值。礙於篇幅，正十六邊形至正十三萬一千〇七十二邊形的相關數據在此省略之。

九六八四四九八〇八四一八二強，再乘上 **131072**，得到內接正十三萬一千〇七十二邊形之周長 **3.141592532889927759** 弱 **(**尺**)**。

接下來，關孝和利用上述割圓求得之正 **32768** 邊形、正 **65536** 邊形以及正 **131072** 邊形周長這三組數據，並透過下述方式來求其「定周」：

第二 求定周
列三萬二千七百六十八角周與六萬五千五百三十六角周差，以六萬五千五百三十六角與十三萬一千〇七十二角周相乘之，得數為實。列三萬二千七百六十八角周與六萬五千五百三十六角周差，內減六萬五千五百三十六角周與十三萬一千〇七十二角周差，餘為法，實如法而一，得數加入六萬五千五百三十六角周，得三尺一寸四分一釐五毫九絲二忽六微五纖三沙五塵九埃微弱，為定周。[15]

這裡為了方便說明，我們假設關孝和計算出的正 **32768** 邊形的周長為 **a**、正 **65536** 邊形的周長為 **b**，以及正 **131072** 邊形的周長為 **c**。依據上述術文可知，實為 $(b-a)(c-b)$ ，法為 $(b-a)-(c-b)$ ，於是，其「定周」即為：

$$\frac{(b-a)(c-b)}{(b-a)-(c-b)}+b = \mathbf{3.141592635359}$$

此即為關孝和所求得徑為一尺時的圓周長，亦可視作為其所得之圓周率近似值。

這裡，關孝和係利用了增約術得到上式。**[16]**首先，我們令 a= p_{15} **(**正 2^{15} 邊形的周長**)**，**b=** p_{16} **(**正 2^{16} 邊形的周長**)**， **c=** p_{17} **(**正 2^{17} 邊形的周長**)**。關孝和求定周公式的關鍵，在於假設了 $\{(p_n-p_{n-1})\}_{n=4,5,\ldots}$ 為一等比數列，即假設正 2^n 邊形的周長與的正 2^{n-1} 周長之差，形成一等比數列，即 $\dfrac{p_n-p_{n-1}}{p_{n-1}-p_{n-2}}=r$ 為其公比，因此，$\dfrac{c-b}{b-a}=\dfrac{p_{17}-p_{16}}{p_{16}-p_{15}}$ 亦等於公比 $\boldsymbol{r}$。同時，可得下列關係 $p_n-p_{n-1}=r(p_{n-1}-p_{n-2})$ ，並可得：

$$p_n-p_{n-1}=r^{n-17}(p_{17}-p_{16})=r^{n-17}(c-b)\ 。$$

---

15 引自徐澤林(2008)，《和算選粹》，頁 224。

16 增約術即無窮等比級數求和方法。可參考徐澤林(2008)，《和算選粹》，頁 186。《括要算法》〈亨卷〉之中的文本內容。

又因為 $\pi=\lim\limits_{n\to\infty}p_n$ ，則

$$
\begin{aligned}
\pi &= p_{16}+(p_{17}-p_{16})+(p_{18}-p_{17})+(p_{19}-p_{18})+\ldots.. \\
&= b+\sum_{n=17}^{\infty}(p_n-p_{n-1}) \\
&= b+\sum_{k=0}^{\infty} r^k(c-b) \\
&= b+\frac{c-b}{1-\dfrac{c-b}{b-a}} \qquad \text{(增約術，無窮等比級數求和)} \\
&= b+\frac{(b-a)(c-b)}{(b-a)-(c-b)} 。
\end{aligned}
$$

以上即為關孝和先割圓求得了正 **32768** 邊形、正 **65536** 邊形以及正 **131072** 邊形的周長之後，再利用增約術求定周的原理。此外，關孝和在求弧長、求立圓積時均使用了此一方法。

四、關孝和與祖率的邂逅

關孝和除了求得圓周率的近似值 **3.141592635359** 之外，他並進一步利用「零約術」，求得了 **113** 個關於圓周率的近似分數。其術文如下：

> **第三 求周徑率**
> **周率三、徑率一為初，以周率為實，以徑率為法，實如法為一，得數，少於定周者，周率四，徑率一，多於定周者，周率三、徑率一，各累加之，其數列於後。**[17]

這裡即為關孝和前述所提及的「**零約術**」，其程序性規則如下：起初以周率三，徑率一出發，即以 **3/1** 作為第一個近似分數，接著「**以周率為實，以徑率為法，實如法為一，得數**」，這個得數即「**周數**」。倘若周數比前節所計算出的「定周」來得小時，分母加上 **1**，分子加上 **4**，可得到分母為下一個自然數的近似分數；若周數比「定周」大時，分母加上 **1**，分子加上 **3**，同樣得到分母為下一個自然數的近似分數，如此，可以求得分母為任意自然數的圓周率近似分數。以下我們實際複製操作關孝和的「零約術」：

首先，「**周率三，徑率一，周數三整**」，由於 $\frac{3}{1}<\text{定周}<\frac{4}{1}$ ，因此，下一個近

[17]引自徐澤林(2008)，《和算選粹》，頁 225。

似分數即為 $\frac{3+4}{1+1}=\frac{7}{2}$ 。而**三五整 (7/2)** 即為關孝和所列的第二個周數，亦即得到「**周率七，徑率二**」。接著，由於 $\frac{3}{1}<$ 定周 $<\frac{7}{2}$ ，因此，第三個近似分數即為 $\frac{7+3}{2+1}=\frac{10}{3}$ ，而三三三三三三三三三三強 (**10/3**) 即為關孝和所列的第三個周數，亦即得到「**周率一十，徑率三**」。再接著，由於 $\frac{3}{1}<$ 定周 $<\frac{10}{3}$ ，因此，第四個近似分數即為 $\frac{10+3}{3+1}=\frac{13}{4}$ ，而**三二五整** (**13/4**) 即為關孝和所列的第四個周數，亦即得到「**周率一十三，徑率四**」。以此類推，關孝和依此程序，逐一求得了分母從一至一百一十三，共 **113** 個近似分數，並全數依序列於《括要算法》的《貞卷之中》。

有趣的是，在這一百一十三個周徑之率之中，關孝和也針對其中七個較特別結果列出相關的數學家或名稱，包含：「**古法，周率三，徑率一**」、[18]「**密率，周率二十二，徑率七**」、[19]「**智術，周率二十五，徑率八**」、[20]「**桐陵法，周率六十三，徑率二十**」、[21]「**和古法，周率七十九，徑率二十五**」、[22]「**陸績率，周率一百四十二，徑率四十五**」、[23]「**徽率，周率一百五十七，徑率五十**」。[24]

最後，當關孝和以零約術求得 **355/113** 之後，便停止了這一程序：「**如右求周數，至周三百五十五，徑一百一十三，而比於定周，雖有微不盡，欲令之適合，則周徑率及繁位，故以此而今為定率也。**」可見，關孝和了解 **355/113** 之近似程序，雖然與「定周」仍有所差，不過誤差已相當小，因此，他便以此「周徑之率：周三百五十五，徑一百一十三」作為常用而重要的「定率」。當然，此率即為我們所熟知的「祖率」，即祖沖之開圓所得之「密率」。

然而，關孝和既然點明了前述七個重要或特殊的「周徑之率」，為什麼關孝和獨未提及「祖率」呢？就目前所知，**355/113** 最早出現於寬文 **12** 年 **(1672** 年**)** 池田昌意所刊行的《數學乘除往來》中，而且當時和算家極少注意到《隨書・律曆志》中關於祖沖之密率的記載，因此，關孝和在此沒有為 **355/113** 標上名號。[25]另一方面，從建部賢弘《綴術算經》的「探圓術，第十一」我們可以略知一二：

---

[18] 《周髀算經》、《九章算術》等古書均用值。

[19] 關孝和所稱之密率 22/7 與祖沖之求得之「約率」相同。《算法統宗》與《算學啟蒙》等中算書皆稱此為密率。

[20] 此處「智」指的是中國晉朝的天文學家劉智。《算法統宗》卷三列出此值，和算家關於此值的記載來自此書。

[21] 中國明代算書《桐陵算法》中採用的圓周率。

[22] 即毛利重能以後，江戶初期和算書中所採用的圓周率 3.16。

[23] 三國時期吳國的天文學家陸績。

[24] 三國時期魏數學家劉徽。

[25] 馮立昇 (2009)：《中日數學關係史》，頁 144。

當關氏碎抹圓而求定周，以零約術造徑周之率，爾後曆二十餘年，睹《隋志》，有周數、率數咸邂逅符合者。咨祖子也關子也，雖異邦異時，會真理相同，可謂妙也。

可見關孝和是用自創的零約術，重新「邂逅」了祖沖之的「**密率：圓徑一百一十三，圓周三百五十五**」與「**約率：圓徑七，圓周二十二**」。這也說明了為何前述關孝和會將其所探得之 **22/7** 稱之為「密率」，而非以祖沖之的「**約率：圓徑七，圓周二十二**」來命名。同時，這也佐證了關孝和運用零約術造「周徑之率」時，並不知曉祖沖之的研究成果。無怪乎，建部賢弘嘆此異時異地的多元發現例子：「妙也！」

此外，這裡值得注意的是，此處依關孝和的零約術所造出的一系列近似分數，並非漸近分數，即誤差並未隨著造「周數」的過程而持續變小，例如「**密率，周率二十二，徑率七**」比下一個「**智術，周率二十五，徑率八**」來得精確。這是因為關孝和在造「周數」的過程中，不斷地將「原周數 $\pi_n = \dfrac{b}{a}$ 」與「定周」和 $\dfrac{3}{1}$ 、$\dfrac{4}{1}$ 兩數進行比較。若原周數 $\dfrac{b}{a}$ <定周< $\dfrac{4}{1}$ ，則新周數 $\pi_{n+1} = \dfrac{b+4}{a+1}$ ；若 $\dfrac{3}{1}$ <定周<原周數 $\dfrac{b}{a}$ ，則新周數 $\pi_{n+1} = \dfrac{b+3}{a+1}$ ，而非透過比較原周數 $\pi_n = \dfrac{b}{a}$ 、定周與新周數 $\pi_{n+1} = \dfrac{b+4}{a+1}$ 的方式，來造出寬度越來越小的區間套，使得新的「周數」的誤差值遞減。也因此，他所造的分數並未總是隨分母增加，而使得誤差值變小。

或許，關孝和造此術除了為找出最近似圓周率的分數，另一用意，也在為了連續地造出分數為所有自然數時的近似分數，再逐一與「定周」比較，檢驗其近似程度。[26]如同其所列出分母從 **1** 至 **113** 共 **113** 個近似分數一般，也因此，便不在意「周數」的誤差是否隨此程序而遞減了。

六、結語

在中日多次文化交流，特別是曆算書的傳入日本的背景之下，《算法統宗》與《算學啟蒙》中有關圓的知識，奠定了早期圓理研究的基礎。因此，我們不難想像關孝和會受到前輩們的影響，而採取與中國數學家們類似的方式，透過割圓，造圓內接正多邊形的方法來探圓周率。

除了前述而祖沖之以「圓徑一億為一丈」割圓密術，求得精確至小數點後 6

[26] 關孝和所建立的方法，除了是一種程序性的方法之外，並可以求得分母為任意自然數的圓周率近似分數。

位的圓周率近似值之外。中國最早有 **π** 近似值的書籍是《周髀算經》與《九章算經》，所謂的「徑一周三」就是出自《周髀算經》，當時所取的值是 **3**。直到西元一至五年，劉歆替王莽製作嘉量斛標準量器時，發覺有估計得更精密的必要，才算出 **3.154** 之值，後世稱為「歆率」。張衡，後漢南陽人（約西元一三〇年），是中國古代最偉大的天文學家，設計渾天儀和地動儀，算定圓周率為 **92/29** 或 $\sqrt{10}$。[27]

中國的劉徽與希臘阿基米德一樣，皆曾割圓造正九十六邊形，求得精確至小數點後 **2** 位的圓周率近似值 **3.14**，在中國，後人稱之為「徽率」。劉徽後來繼續割圓下去，居然割成一個圓內接正三千零七十二邊形，求得更精密的值 **3.14159**。無獨有偶地，一千年之後，又出現了一位「瘋子」**──**趙友欽，把邊數增加到一萬六千三百八十四邊，驗證了祖沖之的密率 **355/113** 是一項很傑出的估計。[28]而稍後法國的韋達 **(1540-1603)**，以阿基米德內接外接正多邊形的方式，造正 **39316** 邊形，準確至小數點後 **9** 位。[29]

數學史家馮立昇認為針對割圓術而言，村松茂清與關孝和與趙友欽更為相近。然而，關孝和的圓切圖較趙友欽的割圓圖更為簡化。此外，關孝和與趙友欽《革象新書》計算圓周率都有著同樣的目標，即說明圓周率的有理近似值355/113的來源。[30]儘管《規矩要明算法》與《算俎》都割至正 2^{15} 邊形，《革象新書》則是割至正 2^{14} 邊形，但是，關孝和繼續割圓至正 2^{17} 邊形，並獨具巧思的引入增約術以加速逼近程序，雖然至今仍不知道他將增約術使用於圓理的計算的想法源自於何處。

然而，以此割圓術求圓周率的「效率」並不佳，準確的速度明顯跟不上割圓的邊數。關孝和活躍的十七世紀，也正是微積分誕生的時代，隨著微積分的發明與發展，利用分析學的手法，以有關於 π 的冪級數展開式，尋求快速收斂的級數，來求圓周率近似值，儼然已是無法避免的新趨勢。至此，也該是傳統「割圓術」慢慢淡出歷史舞台的時候了。從關孝和或建部賢弘等後繼和算學家試造新術求圓弧長的方法來看，造各式冪級數展開式的方法，已慢慢成為和算學家們求圓數與求弧數的主流了。

「**圓徑一百一十三，圓周三百五十五**」，這一簡單而又精確的圓周率近似值，卻見證了關孝和與祖沖之這段相隔了一千二百年的邂逅，亦是數學家們心有靈犀，數學知識多元發現的又一寫照。

---

27 引自洪萬生：〈中國 π 的一頁滄桑〉，《科學月刊》第八卷第五期。
28 引自洪萬生：〈中國 π 的一頁滄桑〉，《科學月刊》第八卷第五期。
29 參考洪萬生，《孔子與數學》頁 127。
30 參考劉雅茵 (2011)，《關孝和《括要算法》之內容分析》，頁 125。

參考文獻

一， 中文資料

比爾・柏林霍夫/佛南度・辜維亞著 (洪萬生、英家銘暨 **HPM** 團隊譯) **(2008)**：《溫柔數學史－從古埃及到超級電腦》，台北：博雅書屋。

徐澤林 **(2008)**：《和算選粹》，北京：科學出版社。

洪萬生 **(1999)**：《孔子與數學》，台北：明文書局。

洪萬生 **(2006)**：《此零非彼 **0**》，台北：台灣商務印書館股份有限公司。

斯坦著 (陳可崗譯) **(2004)**：《阿基米德幹了什麼好事》，台北：天下文化。

馮立昇 **(2009)**：《中日數學關係史》，山東：山東教育出版社。

郭書春 **(1995)**：《古代世界數學泰斗 -- 劉徽》，台北：明文書局。

劉雅茵 **(2011)**，《關孝和《括要算法》之內容分析》，國立台灣師範大學碩士學位論文，未出版。

二，網路資料

http://episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_08_05_3/index.html