

推薦《數學沒什麼好怕的！》

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

書名：數學沒什麼好怕的！（Mathematics MINUS Fear）

作者：波特（Lawrence Potter）

譯者：楊舒娟

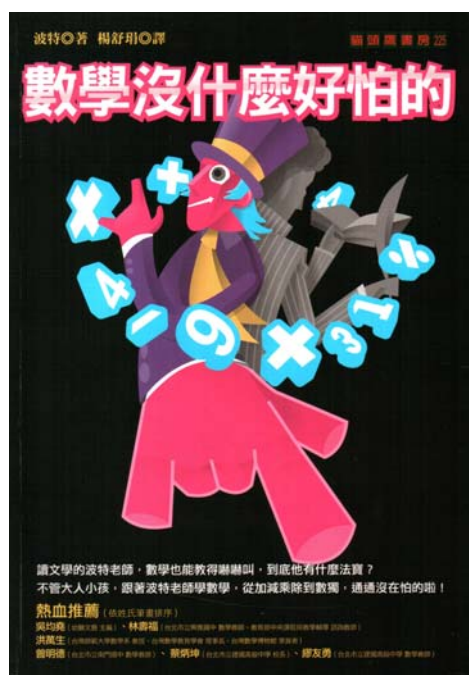
出版社：貓頭鷹出版社，台北市

出版資料：297 頁，平裝

出版年：2009 年

ISBN: 978-986-651-830

關鍵詞：英國科普、數學恐懼症、小學數學、代數、機率、HPM



一、前言

本書是一位原主修古典文學，但卻改行主修數學而成為數學教師的現身說法，作者波特（Lawrence Potter）原畢業於牛津大學馬德林學院，後來，再轉入聖馬丁學院與倫敦大學國王學院，修習數學與數學教育課程，可以說是一位「半途出家」的國中小數學教師。目前，我們國內有許多非數學主修的國小教師，可能多少與他的背景相似，因此，我們鄭重推薦本書給一些可能對數學還有著恐懼的老師與家長，希望大家可以分享波特的經驗，再反思數學是否真地那麼可怕！

另一方面，波特在撰寫本書時，參考引述了許多趣味數學普及書籍、古代哲學家原典、古代數學本文，以及數學史家的著作 – 總計有 39 本之多，令人嘆為

觀止！此一手法在同一類型的科普讀物中相當罕見。事實上，他從中汲取了相當豐富的材料與洞見，非常值得科普作家參考借鏡。

二、內容簡介

本書除導論與尾聲以及 83 個專欄數學問題之外，共分為四大部分：

第一部份：腦袋中的數字，和書面上的數字

第二部份：不同類型的數字

第三部分：未知的恐懼

第四部分：改變未嘗不好

第一部份共有十一章，主題是各個民族的數數（counting）、書寫數字（numeral）的歷史，以及整數的加減乘除運算。其中，他相當苦口婆心地呼籲大家要重視心算能力，並且熟記九九乘法表，以備不時之需，譬如快速「掃描」餐館帳單的合理性，免得讓女性伴尷尬等等！同時，為了強調熟記九九乘法表的重要性，他特別訴諸古人－文藝復興時期法國數學家許凱（Nicolas Chuquet）的《算術三編》（*Triparty*, 1484），此時，他所熟悉的數學文本就立刻派上用場。此外，由於追溯印度－阿拉伯數碼的歷史流傳，因此，作者也提及阿爾·花拉子模（Al-Khwarizmi）的算術著作《後印度人記數加減法之書》，以及費布那西（Fibonacci，斐波那契）的《算盤之書》（*Liber Abaci*）。¹此外，作者也引述了英國數學家雷科德（Robert Recorde, 1510-1558）的算術著作《藝術基礎》（*The Ground of Artes*, 1543），²說明筆算從當時以來，一直沒有改變。還有，作者在介紹「多位數乘法」時，引進阿拉伯人的 *gelosia* 法，該法傳入明代中國時，被稱為「鋪地錦」，而非本書（中譯本）所稱的「鋪地磚」。

第二部份共有十五章，主題是比率、比例式、分數和小數及其四則運算、百分數，以及利息計算。在有關比率和比例式的內容中，作者介紹了宗教、音樂、藝術以及建築等方面的脈絡。接著，在比例式的計算中，他介紹了被尊稱為黃金律的「三率法」（本中譯本譯為「三分律」，中國漢代《九章算術》稱為「今有術」）：亦即給定 $a : b = c : x$ ，求 x 的一種比例方法，並且引述雷科德的計算方法。至於所謂的「比例式也有它的問題」，作者先是藉由柏拉圖《曼諾篇》（米諾篇，*Meno*），提出正方形面積加倍的比例問題，順便介紹柏拉圖有關靈魂（mind 或 soul）與吾人所以有知的主張。另一個比例的經典問題，則引自中國《九章算術》第六章〈均輸〉中的「五渠注池」。緊接著，作者還介紹阿基米德利用比例原理，證明皇冠摻銀的造假事實。在本部份中，與數學史有關的，還有埃及人的單位分數，

¹ 按費布那西此書之書名中譯為「計算書」為宜，該書以推廣印度－阿拉伯數碼及其算術運算法則為職志，完全不涉及所謂的「算盤」，儘管書名英譯為 "Book on Abacus"。

² 按本書書名譯為「計算技術基礎」較妥。

以及其它文明如何面對分數。基於此，作者非常體貼地評論說：「看到世人在創造分數這個概念時遭遇到那麼多問題和困難，光是你有心挑戰分數就值得鼓勵鼓勵。」另一方面，在〈(小數)點到底在哪裡？〉(第十章)中，作者簡要地敘述了歷史上五花八門的小數書寫方式，非常值得參考。其中，他特別指出：「根據澳洲教育研究協會估算，貨幣十進位制和公制單位的發明，至少縮短了十八個月的小學數學課程，不過，澳洲直至一九六四年才頒布這些改制。」還有，在〈利「息」攸關〉(第十三章)這一章中，作者也提供了十分有趣的有關利息的宗教文化史背景。

第三部份的主題是代數。這是本書四個部份中最短的篇幅，只有八章，其內容除了介紹代數的英文字 *algebra* 之語源 *al-jabr* 外，也說明在十六世紀末，韋達 (F. Vieta) 的符號法則出現之前，有關求解方程式的歷史發展，以及相關的幾何演示 (geometric demonstration) 對於學習中學代數可以帶來的極大助益。針對一點，作者別提醒我們說：「需要把數學問題具體化些的人，不應該為此感到羞愧。直到韋達出現前，大多數數學家除非能把等式和幾何圖形連結，否則也會覺得等式隱晦不易懂。」緊接著，他介紹十五世紀的「會計學之父」帕奇歐里 (Luca Pacioli) 在他的《算術、幾何與比例總覽》(1494) 中，針對二次方程式 $x^2 + 10x = 39$ 的求解所提供的幾何方法，而這當然可以回溯到第九世紀的阿爾·花拉子模的代數學。

第四部份主題是機率，共分十章論述。作者在本部分除了說明處理機率問題所仰仗的主要概念工具 - 機率空間圖與樹狀圖之外，他的敘事所運用的手法，正如前述，還是在歷史脈絡中「還原」或「重建」機率問題的意義。(而這當然是一種 HPM 的手法) 為此，他引述了許多偉大數學家的觀點。譬如說吧，他在本部分第一章，就引述了拉普拉斯 (Pierre-Simon Laplace, 1749-1827) 與萊布尼茲的觀點，拉普拉斯著有《機率的分析理論》，對於古典機率論之貢獻，當然不在話下。至於萊布尼茲則從哲學近路來思考如下問題：如果你能用數字衡量做某事會有多少好處，再用另一個數字表示你即將採取的行動有多大機會能完成該目的，那麼，兩個數字相乘所得到的積，就是你所採取行動的預期益處。再如，在第二章中，作者參考了卡當諾 (Girolamo Cardano, 1501-1576) (即第三部份所提及之卡達諾) 之著作《機率遊戲勝算》(*Liber de Ludo Aleae*)，他是第一位分析賭博遊戲的數學家 (兼賭徒)。因此，「機率的誕生或可追溯到十六世紀，而卡當諾堪稱時代的先驅」。不過，真正的「機率之父」，則是本部份第四、五章所提及的偉大數學家巴斯卡 (Blaise Pascal, 1623-1662) 與費馬 (Pierre de Fermat, 1601-1665)，他們按各自獨立的方法所解決的「點數問題」(Problem of Points)，就是古典機率論的起點。

作者在本部份所引述的數學家，還有第三章的達朗貝爾 (Jean d'Alenbert,

1717-1783) 與第十章的伯努力 (Jacob Bernoulli, 1654-1705)。前者針對硬幣正反面出現機率，提出了錯誤的解答，不過，他仍然是一位傑出的數學物理學家，也是十八世紀法國百科全書派的巨擘。後者出自著名的瑞士數學家族，在大數法則上，做出了最重要貢獻，此一法則是經驗科學的基石，它主張：「嘗試次數愈多，成功次數和嘗試次數的比，就更接近理論機率的比」。此外，在第十章，作者也介紹了哈雷 (Edmond Halley, 1656-1742) (亦即發現哈雷彗星的天文學家) 有關壽險之研究。哈雷繪製了史上第一張壽險表格，其標題相當冗長：「人類死亡率預測 - 從布里斯拉斯市有趣的出生和喪葬中汲取資訊，企圖探討壽險年金價值」。

三、評論

本書是一本洋溢著 HPM 風格的數學普及著作。所謂的 HPM (Relations between History and Pedagogy of Mathematics)，是指數學史與數學教學之關連的一種知識活動。由於作者是第一線的國中小數學教師，所以，他當然深知在課堂上，情境 (situation) 鋪陳之重要。顯然基於此一關懷，在本書中，作者將相關的歷史脈絡 (含數學人物、文本與事件)，當作數學教材教法整體結構的一個主要環節。換言之，數學史成了他的教學過程中，一個不可或缺的概念工具 (conceptual tool)。

對於我們國內的讀者 (尤其是國中小數學教師) 來說，本書有一些題材 (譬如整數與分數的四則運算，以及解方程式等等) 當然顯得多餘，因為那些是我們的強項。不過，作者在請出許多古代先賢來替這些算法「背書」時，還是非常值得我們欣賞！一旦學校教育中的學習評量習慣方式改變了，我們在要求學生熟習這些計算技巧時，可能也需要類似的「道德勸說」吧。同時，這些先賢給出看似笨拙的方法，也可以幫助我們「同情地了解」今日學生之認知處境。³再有，作者的相關數學經驗相當豐富，文筆幽默風趣，又每能就近取譬，也很能呼應他的教學經驗。因此，本書也可視為一本教材教法範本，值得數學教師參考與借鏡。

總之，本書所以特殊，乃在於作者的博雅素養。誠如前述，作者先是修習古典文學，再轉往數學專業，最後成為一位誨人不倦的第一線數學教師。這種生涯上的不斷「冒險」，給了他極寬廣的視野與彈性，無怪乎他在數學 vs. 敘事 (mathematics vs. narrative) 上，給了我們相當優雅的平衡。相對於數學普及作家的「單一化」背景，本書作者所表現的多元跨界書寫風格，特別值得我們注意。

本書有一些文字或符號誤植，茲在此指出：頁 185 謂南宋偉大數學家「秦九韶是蘄州 (今湖北蘄春) 一代的聖哲」，按秦氏曾任蘄州通判，此處顯然有誤。又，頁 218 之 $xn+yn=zn$ 應為 $x^n + y^n = z^n$ 才正確。再又，〈延伸閱讀〉(頁 295) 中

³ 這樣子的「以古鑑今」，其實也是 HPM 的功能之一。

“Hawkind, T. L.” 應該是 “Hawkins, T. L.” 才對。另外，有一些符號式的編排不符合一般體例（譬如頁 190），值得修訂。

優秀數學科普作品的指標

評價方式：指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

1. 知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)

- (1) 認識論面向：☆☆☆
- (2) 方法論面向：☆☆☆
- (3) 歷史或演化面向：☆☆
- (4) 哲學面向：☆
- (5) 教育改革面向：☆☆☆
- (6) 與自然科學、人文社會乃至生活經驗的連結：☆☆

2. 形式或表達 (Form or representation)

- (1) 創新手法：☆☆☆
- (2) 數學知識的洞察力：☆☆☆
- (3) 歷史事實的洞察力：☆☆☆
- (4) 異文化的啟蒙意義：☆☆☆
- (5) 忠實可靠的參考文獻：☆☆☆
- (6) 敘事的趣味性、可及性與一貫性：☆☆☆☆

3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form)

- (1) 青少年層次：☆☆☆☆
- (2) 一般社會大眾：☆☆☆☆

4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage)：

試想十四世紀歐洲的平凡店主見到鄰居和競爭對手紛紛捨棄算盤，改用新奇的筆算算術，且服務客戶的速度還比他快一倍，他受到的創傷會有多大。他自知得迎頭趕上，否則一定會關門大吉。可是他又不懂這些符號和線索，也不知道何時需要「借位」和「進位」，更何況坊間還駭人聽聞地盛傳這些新數字有危險魔法。這店主的幾位朋友還說，這套新數字是東方巫師用來蠱惑誠實西方人心的工具。他們說，有位神秘的國王叫做亞格里斯摩斯（**Algorismus**，阿拉伯數學家阿拉子模的拉丁譯名），⁴明文規定必須依照他特定的「法則」運算，但真正的目的是要誘騙人心。到底如何是好？

若從經濟的現實面來看，其實毫無爭論的餘地。於是，這位店主踏進教授這些奇特數字的新式學校。他告訴同學有關亞格里斯摩斯國王令人畏懼膽寒的故事，反而遭到嘲笑。同學回答道，他那些朋友講的其實是阿拉伯著名數學家花拉子模，許多他正在學的新運算技巧都出自這一位大師的著作。他們還說，為了紀

⁴ 按這個字後來就轉化為英語的 **algorithm**，亦即算法或算則之意。

念這位偉大的數學家，所有特定運算模式的標準系統，英文都通稱為「算術」。
店主終於鬆了一口氣，著手在他嶄新的藍色習作本上寫下算式，夢想有一天他能
把多位數乘法做對，得到老師的金星獎勵。(p. 54)