

# 強調理解的《分數之旅》

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

書名：《分數之旅》

作者：鈴木一己

譯者：陳昭蓉

審定：曹亮吉教授

出版社：小天下，台北市

出版資料：126 頁，精裝

出版年：2004 年

ISBN: 986-417-305-7 (312)

關鍵詞：日本科普、小學數學、分數、共通尺度、敘事



## 一、前言

本書日本版是太郎次郎出版社所出版的「輕鬆學算數」系列中的一本。根據作者鈴木一己自序：「本書統整了分數的世界，希望小學生也能輕鬆掌握分數的概念。」為此，本書的特色在於「讓孩子可以一邊看故事，一邊思考分數的問題，然後循序漸進的瞭解分數的世界。」因此，本書盡量減少了分數計算的練習。作者建議家長或教師如果希望孩子多做一點計算練習，盡可利用教科書或參考書。

顯然，作者為孩子多開一扇理解分數的窗子之餘，並不反對傳統熟練計算的學習活動。其實，作者也特別提及：「在我撰寫這本書的時候，恰好市面上出版

了《不懂分數的大學生》之類的書，導致許多人開始對分數的問題比較關心。一直以來，分數總是讓不少孩子傷透腦筋。然而，我希望每個孩子都能快快樂樂的瞭解分數，所以才花費許多心思，終於完成了這本書。建議所有家長和孩子一起讀，一邊對話一邊學習。」

因此，本書或可視為日本教改人士為分數學習所提供的課外補充教材。當然，本書為了分數相關概念所布置的故事情境難免「失真」，不過，正如曹亮吉教授在他的審定序所指出：利用本書，「第一，藉機讓子弟能欣賞他國的歷史與人文。第二，誘使子弟搜尋本地的史地與人文。第三，原書若有情境不真實處，可以和子弟討論，把它改得真實。」還有，針對本書的敘事，曹亮吉也分享了他有關「數學與敘事」的洞察力：

學數學扯上史地與人文，會不會離題太遠？不會！否則，除了為數學而數學，一般人學數學做什麼？

## 二、內容簡介

本書附有教學手冊，並含習題解答。由於該手冊對於本書內容，已有非常簡要的介紹，因此，我們在此不想多所重複，只提及一些據以評論之相關內容。不過，由於這是一本童話故事包裝的分數概念之旅，所以，還是值得引述本書之目錄：

- 1 雅典的神殿 鋪排地磚的共通尺度
- 2 雅典的市場 分數：表示多餘部分的數
- 3 帕爾納索斯山 比較分數的大小
- 4 羅馬 分數的加法
- 5 討伐高盧 分數的減法
- 6 君士坦丁堡 分數的兩種意義
- 7 安提阿 分數的乘法
- 8 波斯邊境 分數的除法
- 9 地中海上空 分數和小數的差異
- 10 亞歷山卓的街道與港口 乘以整數倍、分數倍的魔法箱
- 11 亞歷山卓的市場 魔法箱的？分數倍作用
- 12 波斯的街道 終曲
- 13 分數的世界 增強分數能力的七個入口
- 14 美夢結束 真正的終曲

其中，敘事順序之安排「大致是根據歷史發展（像是建築、戰爭等），其他（如：情節、對話等）都是虛構的。」至於角色（包括阿波羅的使者佩格薩斯，一匹飛

馬)呢,除了尤利安(332-363,羅馬皇帝)之外,其他包括本書主人翁建次郎在內,也都是虛構的。

本書一開始敘述建次郎在他的臥房內,被一面魔鏡帶回古希臘的世界之中,於是,他便在這個古代世界中,進行了一趟十分精彩的「分數之旅」!第1章強調分數與分子、分母「共通尺度」之密切關係,而這更是分數與小數的不同之處,儘管它們都用以表示「突出部份的量」。作者當然也指出「要找出最大的共通尺度,最方便的方法是輾轉相除法。」而這當然呼應了歐幾里得《幾何原本》中的輾轉相除法,尤其是其第十冊的針對幾何量(magnitude)之版本。不過,作者還是諄諄告誡:「對於分數的初學者來說,只要能理解分數的分母、分子代表什麼意義,那麼使用一開始提到的方法其實就足夠了。刻意使用輾轉相除法,反而像是只需要菜刀就能切小黃瓜,卻故意拿出斧頭一樣。」

第2章正式引進分數,以及它的大變身如假分數與帶分數等等。接著,在第3章,作者開始比較分數大小,其中更是引進約分與擴分之意義。第4章主題是分數加法,第5章主題則是分數減法。第6章提供分數的兩種意義,並且介紹古埃及的單位分數(unit fraction)及其相關計算: $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ ;  $\frac{2}{15} = \frac{1}{8} + \frac{1}{120}$ 等等。

第7、8章依序介紹分數乘、除法。有關前者,作者詳細舉證說明「分數的乘法就是尋找共通尺度」。至於有關分數除法,其運算所依據之理由,仍然與所設分數之共通尺度有關。基於此,作者提供了多種說明,譬如:「(1) 將帶分數化為假分數,找出共通尺度的大小。(2) 接下來,要將代表有幾份的的分數倒過來。(3) 進行分數的乘法運算。」這些對於好學深思的學童來說,應該是很有助益才是。事實上,作者在本書所附的《教學手冊》中,就特別指出:「大部分的孩子都會背『分數除法就是把除法的分子和分母上下顛倒之後,再把除號改為乘號』,所以遇到計算問題通常都會做。然而,雖然大家都記得這個結論,要是問問他們『為什麼要顛倒之後乘起來』,幾乎沒有人回答得出來。所以,我們把本章重點放在『讓大家了解為什麼要顛倒之後再乘起來。』

第9章主題是分數與小數之互換,其中論及循環小數如何轉換成為分數,以及分數與小數之差異。作者以 $1/7=0.142857142857\dots$ 為例,將這個無限循環的小數裝進一個盒子,如此即可經由運算而求出這個盒子 $=142857/99999$ 。至於分數與小數有何差異呢?作者提出下列說明:「分數是根據要測量的對象決定分母;小數則是剛開始先將單位分成十等分,造出新單位後繼續測量,如果還是有突出部份,再將單位分成十等分,以更新的單位測量。這就是兩者最大的差別。」

第10、11章的主題是乘以整數倍與分數倍的意義,希望學童藉以了解:如

果對某個數量執行某個動作（操作），那個數量可能會產生變化，變得和原來的量不同。

第 12 章說明建次郎這一趟分數之旅的終曲，敘事以尤利安皇帝遠征波斯而戰死沙場告終。最後，作者在第 13 章「分數的世界」中，將本書內容佈置成為「增強分數能力的七個入口」，利用遊戲方式，挑戰學童打通這七個關卡。

### 三、評論

無論從數學史或教學順序觀點來看，本書所念茲在茲的「共通尺度」，都是學習實數，尤其是如何從有理數過渡到無理數，的一個不可或缺的概念工具（conceptual tool）。這個概念源自古希臘畢氏學派的可公度量（commensurable）概念。事實上，畢氏學派也是基於此而發現了接近現代無理數（irrational number）概念的不可公度量（incommensurable）。這是西方數目發展史上最精彩的篇章之一，值得深入探索。對於數學教師來說，想要比較平順地引導學生從有理數過渡到無理數，我們也大力推薦這個概念工具的適當使用。

因此，本書不僅適合學童家長或小學教師研讀，再設法融入親子教學內容，只要不貪多（切記！），一定可以訓練學童的數學思維與表達能力。另一方面，由於有關無理數的教學，我們始終找不到比較親切自然的切入點，因此，對於國、高中的數學教師而言，本書應該列為重要的參考用書，尤其是其中有關「共通尺度」之圖示，更是值得引介的教學設計。其實，如果讀者有機會欣賞蘇惠玉或蘇俊鴻老師有關 $\sqrt{2}$ 的 HPM 教學設計，就一定可以發現此一類似圖示的洞識與巧思了。還有，對於想要深入理解中國古代分數運算的讀者，本書對於其相關圖示與解說都極有助益，非常值得參考。

不過，如果小學高年級數學教師有意參考本書，在分數教學時引進若干教材，那麼，正如前文提醒，圖示與說明方面宜適可而止，千萬不要以為箇中道理講解得越翔實越好，這是因為對一般學童來說，一旦掌握了分數基本運算之後，他們是否有興趣深入探討這些底蘊的原理，恐怕就很難說了。

### 優秀數學科普作品的指標

評價方式：指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

#### 1.知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)

- (1) 認識論面向 ☆☆☆☆
- (2) 方法論面向：☆☆☆☆
- (3) 歷史或演化面向：☆☆☆
- (4) 哲學面向：不適用

- (5) 教育改革面向：☆☆☆
  - (6) 與自然科學、人文社會乃至生活經驗的連結：☆☆
2. 形式或表達 (Form or representation)
- (1) 創新手法：☆☆☆
  - (2) 數學知識的洞察力：☆☆☆
  - (3) 歷史事實的洞察力：☆☆
  - (4) 異文化的啟蒙意義：☆☆☆
  - (5) 忠實可靠的參考文獻：☆☆
  - (6) 敘事的趣味性、可及性與一貫性：☆☆☆☆
  - (7) 中譯本的品質 (若需要)：☆☆☆☆
3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form)
- (1) 青少年層次：☆☆☆☆
  - (2) 一般社會大眾：☆☆☆☆
4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage) :  
(從略)