數字的故事告訴了我們什麼？
評論《毛起來說 *e*》

蘇惠玉
台北市西松高中

書名：毛起來說 e (***e*: The Story of a Number**)
作者：**Eli Maor**
譯者：鄭惟厚
出版社：台北：天下遠見出版公司
出版資料：**2000** 年第一版，共 **304** 頁，定價 **250** 元。
國際書碼：**ISBN 957-621-743-1**

一、前言

筆者 **1998** 年參與國科會研究計畫「古文本在數學課堂中的應用」時，選定了「圓」當教學上的主題，主持人洪萬生教授推薦我看 ***To Infinity and Beyond: A Cultural History of the Infinite***，作者即為 **E. Maor**。這本書的內容非常的生動有趣，同時包含許多的數學人文活動面向，讓人印象深刻。也因此開始注意到 **Maor** 這個作者的一系列書籍。於是，我們這一群人上網買了 **Maor** 的另兩本書：***e*: The Story of a Number** 及 ***Trigonometric Delights***。在我們還來不及將英文版讀完之時，想不到天下文化已經發行了中文版了（《毛起來說 ***e***》與《毛起來說三角》）！在語言的便利之下，當然先讀中文版囉！

在高中舊課程的最後一年中，高三學生必須要學習微積分，學習指數與對數的微分當然也是勢所必然！但是，在一般教科書中，***e*** 這個數字只是冷冰冰的定義而已。所以，我試圖從《毛起來說 ***e***》這一本書中，尋求一些教學上的資源。而在教完這個單元的現在，我可以很欣慰的表示說：收穫良多。

本書作者及譯者簡介如下：**Eli Maor,** 芝加哥羅耀拉大學 **(Loyola University)** 數學史教授，多年來於許多數學和數學教育期刊發表過文章。**譯者**鄭惟厚，台灣大學數學系畢業，美國愛荷華大學統計博士，現任淡江大學數學系教授。

二、內容簡介

Maor 在序言中提到，要更正學生對數學的負面態度，「**講點數學歷史是很好的方法**」，而這本書就是從這種教學法衍生出來的。同時，他認為 π 的歷史書

寫中，沒有比 **P. Beckmann** 的 ***A History of*** π 更好的書，而在 ***e*** 的歷史書寫中，還沒有可媲美的書出現。他似乎有個雄心壯志，想要在數字的歷史書寫中，佔有一席之地。

這本書中總共有 **15** 章，**8** 個附錄。茲引述如下：

第 1 章 納皮爾：對數的創造者
第 2 章 迎接對數
第 3 章財務問題
第 4 章極限
第 5 章微積分的源起
第 6 章突破的前奏
第 7 章求雙曲線的面積
第 8 章一門新科學的誕生
第 9 章大爭論
第 10 章 e^x **：等於自己導數的函數**
第 11 章 e^θ **：神奇螺線**
第 12 章 $(e^x+e^{-x})/2$ **：懸著的鏈子**
第 13 章 e^{ix} **：「最有名的公式」**
第 14 章 e^{x+iy} **：想像成真**
第 15 章 但它到底是怎樣的一個數呢？
附錄 1 納皮爾對數的一些補充說明
附錄 2 當 $n\to\infty$ **時，極限值** $\lim(1+1/n)^n$ **的存在**
附錄 3 微積分基本定理的啟發式推導過程
附錄 4 當 $h\to 0$ **時，** $\lim(b^h-1)/h=1$ **與** $\lim(1+h)^{1/h}=b$ **之間的關係**
附錄 5 對數函數的另一種意義
附錄 6 對數螺線的兩個性質
附錄 7 雙曲函數中的參數 ψ **如何解釋**
附錄 8 e 展開到小數一百位

從目錄來看，就可以知道 **Maor** 這一本書的安排順序。因爲 $e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$ 這個數字，牽涉到對數、極限與微積分的觀念，所以，**Maor** 將這些觀念的發展，以時間爲縱軸來敘述，再佐以相關的數學史上的人物、典故爲橫軸，其間夾雜以一些風雅的 ***e*** 的趣聞來點綴。

Maor 以對數的起源當故事的開頭。在第 **1** 章、第 **2** 章中，他首先敘述了納皮爾（**1550-1617**）的生平事蹟。然後再詳細地講解納皮爾對數產生的作法。因

爲在納皮爾的對數中，納皮爾選取的底爲$1-10^7$，即$N=10^7(1-10^7)^L$，其中 ***L*** 爲 ***N*** 的納皮爾對數。當然，我們可以發現這個 ***N*** 的定義方式與現今的$\frac{1}{e}$定義幾乎是等價的。所以，**Maor** 說：「**事實上，納皮爾還差一點發現了$\frac{1}{e}$這個數。**」（**p. 11** 注 **14**）第 **2** 章中，他接著說明對數發明後大受歡迎的程度，以及後續的改良。

到了第 **3** 章，內容漸漸和 **e** 的主題有關了。由於金融貿易的需求增加，利息的複利計算變得非常的重要。其中，若將計息的次數趨近於無限大時，即是現今對 ***e*** 的定義：$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$。理所當然的接下來，就是闡述極限的意義了。所以，第 **4** 章中，**Maor** 開始說明何謂極限，如何計算極限。他舉了許多我們在高中課本中常看到的極限的例子，來說明一般情形下的極限取法。而又因爲不定式的極限過程與一般基礎科學不同，不能依賴實驗數據而成爲一個「定律」，所以，在此，**Maor** 似乎要展現他的「博學多聞」，將焦點暫時轉移到數學與其他基礎科學的不同之處。之後，再將焦點繞回$(1+\frac{1}{n})^n$上。爲了要將這個式子展開，需要二項式定理，接下來，**Maor** 先從巴斯卡三角形講起，再說明一下組合公式（這裡就顯得與主題無關了），然後才是正題：將$e=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$利用二項式定理展開。到此，**Maor** 算是完整地說明 ***e*** 這個數字了。

說明 ***e*** 這個數字的特性，必須藉助於微積分。所以，從第 **5** 章開始，**Maor** 將注意力著重在微積分的發展上。他先要講「微積分的起源」，所以，他從阿基米德（**Archimedes**）開始，認爲他的窮盡法已經相當接近現代積分學的想法了。他以阿基米德處理圓面積及拋物線爲例，說明阿基米德的想法。最後 **Maor** 下了一個結論：「**既然窮盡法相當接近現代的積分學，那麼為什麼當時希臘人沒有發明微積分呢？**」（**p. 61**）他的理由是：**(1)** 因爲希臘人認爲無限是令人恐怖的事物（**horror infiniti**）；**(2)** 因爲希臘人沒有代數符號。爲什麼覺得無限「恐怖」呢？當然必須從季諾（**Zeno**）的悖論（譯者翻譯成詭論）講起。第 **6** 章中，時間繼續往微積分的發現推進，**Maor** 提到了當時的環境背景：因爲航海技術的需求，以及哥白尼天文學的影響，使得應用數學逐漸佔上風，而刻卜勒 **(Kepler)** 的極微量方法 **(method of indivisible)** 就被 **Maor** 視爲「離現代積分學只差一步」。（**p. 74**）

接下來，本書穿插一個第 **7** 章「求雙曲線下的面積」，再將 **e** 這個主題與積分結合在一起。從直線形面積公式的推導，到就曲線下面積求法的需求而言，當然，接著就輪到笛卡兒與費馬的解析幾何出場了。所以，**Maor** 敘述了笛卡兒的

生平事蹟，他的座標幾何，及他的《幾何學》的影響。而費馬的故事中，就集中在他如何推導出 $y = x^n$ 的曲線下面積的積分公式，當然 $n = -1$ 是個例外。而耶穌會教士聖文生（**1584-1667**），則推得 $y = \frac{1}{x}$ 曲線與 **x** 軸夾的區域面積應該是一個對數函數。接下來的，就交給微積分來處理了

第 **8** 章中，以牛頓為主，**Maor** 敘述了牛頓的生平事蹟、牛頓從巴斯卡三角形得到靈感的「無窮級數」（**infinite series**），然後是牛頓的「流數法」。第 **9** 章的主角當然就是萊布尼茲啦！同樣的，在這一章中，**Maor** 敘述了萊布尼茲的微積分方法，同時，因為 **Maor** 要強調一個好的代數符號的便利，所以，他在處理萊布尼茲的方法時，就會著重在符號的運算上，並以實例來說明萊布尼茲的方法。在這一章的最後，不可免俗的，當然要提到微積分發明先後的爭論，以及這個爭論對英國及歐陸數學發展的影響。

從第 **10** 章到第 **14** 章，主角又回到 **e** 本身了。有了微積分的襯托之後，就可以看出 e^x 這個函數的特殊之處。第 **10** 章中，先說明 e^x 的微分（變化率），以及在自然中的一些自然指數的例子，和解物理問題時會得到的一次及二次微分方程的解。再藉著指數與對數間互為反函數的關係，導出對數的微分。第 **11** 章是對數螺線 $r = ae^{\theta}$ 的介紹。這時，當然就必須介紹伯努力家族了。介紹了他們對數學的貢獻與成就，以及他們家人之間的互相爭吵之後，**Maor** 將注意力轉回極座標與對數螺線的介紹。第 **12** 章處理了一個「懸著的鏈子」的問題之解決方法，這一條懸著的鏈子的圖形居然是 $y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$ 這樣的曲線，而不是一般直覺認為的拋物線！而此時，當然就自然而然地引入雙曲正弦（ $\sinh x$ ）等雙曲函數了。

第 **13** 章說明 e^{ix} 函數的意義，當然主角就是歐拉（**Euler**）。在這一章中，**Maor** 說明了歐拉的生平、他的一些數學成就，還有他對 e^x 的定義及延伸，以及 $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ 這個令人驚訝的式子。有了指數出現虛數的例子，當然就要進一步說明指數是複數的意義了。所以，在第 **14** 章中，**Maor** 首先說明了「虛數」的誕生過程，負數與虛數的發展，到進一步的向量、複數平面的表示方式，最後就是 e^{x+iy} 的意義了。

在後一章，**Maor** 將焦點回歸到 **e** 到底是什麼的問題上。既然 **e** 是一個數字，當然要從數字的發展說起。從畢氏學派的自然數、有理數到無理數的發現，而後是戴德金（**Dedekind**）的分割，實數才算是完全有了嚴密的基礎了。但是，**e** 只是一個無理數嗎？當然必須再進一步地區分成「代數數」與「超越數」。所以，結論是：***e*** 是一個超越數。（那超越數的「實質」意義是什麼？作者沒說！）

Maor 除了正文及附錄之外，在每一章的後面，都還會附上與正文相關的一些資料，或是補充數學算法上的不足，如對數的計算、極微量方法的使用；更有一些非常豐富的有關 **e** 的趣聞、歷史、及相關數學概念。像是自然界及藝術界中的對數螺線，讓人對大自然造物的奧妙，及人類藝術創作與數學結合的美嘆爲觀止。這是 **Maor** 的書吸引人的特點之一。

三、評論

當我們看這樣一本科普書籍時，我們的期待是什麼？可能是知識的獲得。而從這一方面來看，**Maor** 的這本書，算是達到了讀者的這一要求。他將有關 **e** 的概念發展，歷史典故，趣聞、以及應用，鉅細靡遺地呈獻給讀者。同時，他又減少了艱深的數學理論的推導過程，將整本書的數學門檻降低了許多，這也是他這一本書讓人覺得親切的地方。所以，我看完了這本書以後，總有參與了一次還算有趣的指數、對數微分的教學活動之感覺。

事實上，本書內容的確有很多是可以豐富我們教學活動的，除了相關數學家的生平之外，**Maor** 先求 e^x 的導函數，再求它的反函數 $y = \ln x$ 的導函數的進路，就是一個我在課堂上實地運用的例子。同時，**Maor** 提供的許多自然界及物理中有關自然指數函數的實例，也理應豐富學生對 ***e*** 的瞭解。

不過，如果我們苛求一點，這一本書的許多地方是不合格的。當我們在看這樣一個數字的「歷史」時，不可避免的，一定會提到「人」的活動，而人的活動不應該只是有趣的軼事而已，社會的互動其實會影響到數學知識的發展方向，這一論點，現今的數學史研究或是數學教育研究都是贊同的，並且日漸受到重視。然而，在 **Maor** 的書中，我們看到的是數學知識的客觀性與普遍性。他對歷史的解讀，是一種「去脈絡」的方式，亦即將按現今數學的眼光或標準來衡量歷史事件。雖然他想要以「歷史跳脫公式」，卻也只是將歷史當成是「茶餘飯後」的材料而已。

例如，**Maor** 提到了極限，也就是無限大或無限小的問題，他使用了將數「分割」，及「數學原子」這樣的字眼（**p. 40**）同時，又提到了希臘人對無限的恐懼（**p. 63**），爲什麼會恐懼呢？希臘人對無限的恐懼影響的不只是當代人而已，其實一直到微積分的發明後，西方數學都還籠罩在它的影響下呢。這麼重要的一個文化脈絡，**Maor** 卻是交代不清，或是隻字不提。**Maor** 只有簡短的說明季諾悖論中的一個，想以這樣簡陋的說明打發讀者！熟悉希臘數學史或是科學史發展的讀者應該都知道，希臘人對於「變化」的興趣，以及當時兩派意見相佐的看法，一是認爲運動是連續不可分的，以赫絡克里克斯（**Heraclitus**）爲代表；另一派認爲時間或空間有最小的分割單位，以德莫克里特斯（**Democritus**）爲代表。而巴門尼迪斯（**Parmenides**）則兩者皆不同意，他認爲運動是不可能的。他的弟子

季諾（**Zeno**）就是爲了要反駁這兩派的說法才提出那四個悖論。根據亞里斯多德，我們可以知道季諾的這四個悖論，前兩個是在反駁第一派的說法，後兩個是在反駁後一派的說法。因爲季諾的「搗蛋」，及其對變化問題的關切，卻又無法以理性說明清楚，所以，希臘人不敢去碰觸這樣的問題。從此看來，阿基米德離積分的發現，不只是一步之遙而已，而是一條沒有辦法跨越的鴻溝。

Maor 在第 **15** 章中對畢氏學派的說法，也有一點是讓人啼笑皆非的。「發現這些洞（無理數）是畢達哥拉斯的功勞」（**p. 267**）？這句話想必會讓畢格哥拉斯跳腳吧！他巴不得不要發現這些洞，這樣他的 **--**「萬事萬物皆由自然數及其比值所構成」之主張才得以完整呀！無理數的發現著實困擾了畢氏學派許久，他們把這些數稱爲「不可公度量的」（**incommensurable**）數，並不代表他們就欣然接受。同樣的問題也發生在刻卜勒身上，**Maor** 說：「刻卜勒發現了五個正立體的幾何構造，他認爲這些構造，決定了六個已知行星的軌道之間的差距」（**p. 71**）。這句話有誘導讀者之嫌，刻卜勒最先在構思行星運行軌道的模型時，因爲對柏拉圖的忠誠，所以，才先以五個正立體爲模型，在沒有辦法解決問題的情況下，才修正軌道成橢圓。（這點 **Maor** 在第 **15** 章時有提及，不過，也只是一句話「誤入歧途超過三十年」而已。）

同樣的問題也發生在「求 $y=\dfrac{1}{x}$ 的曲線下面積」及 $\sqrt{-1}$ 的誕生上。**Maor** 在第 **7** 章「求雙曲線面積」這一章中，爲了引進解析幾何，當然得提及笛卡兒及費馬。他說：「大約在十七世紀之初，好幾位數學家曾各自獨立地試圖解這個問題（即指介於 $y=\dfrac{1}{x}$ 的圖形、**x** 軸及兩條垂直線 $x=1$ 及 $x=t$ 之間的區域面積），其中最有名的包括費馬及笛卡兒。」（**p. 82**）雖然笛卡兒在 **1632** 年的書中，曾回答 **Mersenne** 有關 $y^n = px$ 的面積、體積和質量中心等問題，但在 **1637** 年他的《幾何學 **(*Géométrie*)**》出版後，笛卡兒對這方面的問題的興趣已經減弱。[1]《幾何學》關注的焦點所在，是藉著代數的幫助，笛卡兒想找出統一的方法，去解決幾何作圖的問題。[2]就我所看到的文獻而言，並沒有提及笛卡兒曾經去解過那個問題。**Maor** 在這裡並沒有提供參考文獻，所以，有點讓人無法信服。

而在 $\sqrt{-1}$ 的誕生的故事中，**Maor** 的看法就如同一般「不熟悉」數學史的教師們所認爲的：$\sqrt{-1}$ 誕生於解二次方程式中。**Maor** 說：「方程式 $x^2+a=0$ 無解的這個問題，已經存在了好幾個世紀，**……**最早嘗試的人是義大利數學家卡丹諾，他在 **1545** 年試著找尋兩個數，使兩數和爲 **10**，而積爲 **40**。」（**p. 232**）**Maor** 沒有提及的是，卡丹諾這個問題出現在他於 **1545** 年出版的重要書籍《大法》（***Ars Magna***）的第 **37** 章中。而這本書的用意是在介紹三次、四次方程式的求根公式。

---

[1] 請參考 C. Boyer (1949) *The History of The Calculus and Its Conceptual Development* (New York: Dover), p. 16.

[2] 參考 Nuffield Foundation 出版的 *The History of Mathematics*. Singapore: Longman.

事實上，卡丹諾在這本書的第十一章中，即給出解 $x^3+mx=n$ 的方法。但是，同時他也碰到了「不可約」的三次方程式的問題，例如像是 $x^3-15x=4$ 的不完全三次方程式，以卡丹諾解法，它的解爲 $x=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}-\sqrt[3]{-2+\sqrt{-121}}$ ，但是，我們又知道這個方程式有三個不同的實數解。卡丹諾沒有辦法處理這個問題，所以，雖然他在第三十七章中，看起來好像可以處理 $5+\sqrt{-15}$ 及 $5-\sqrt{-15}$ 這兩個數字，他卻也說「既精妙又無用」（**as subtle as it is useless**）。[3] $x^3-15x=4$ 的解的問題要到邦貝利（**R. Bombelli, 1526~1573**）出版他的《代數學》**(*L'Algebra opera*)** 中，才獲得解決，也才真正建立了虛數的運算法則。所以，$\sqrt{-1}$ 這個數之所以變得不可忽視，是來自於解三次方程式中，而不是二次方程式。[4]

上述所提及的，都是 **Maor** 在「應用」數學史時的一些「去脈絡」問題。當然，若持平一點的論斷，在一本科普的書籍中，要把歷史講得有趣，卻又得兼顧其歷史意義，並不是一件容易的事。或許我對 **Maor** 是有一點要求太過了吧！但是，有一點卻是我無法理解與諒解的，即是史料的錯讀。在本書的第 **5** 章「微積分的緣起」這一章中，阿基米德是一個很好的開端。在解釋阿基米德如何證明圓面積公式及如何求得 π 的近似值時，**Maor** 說：「利用圓內接與外切正九十六邊形（他是從正六邊形開始，然後不斷把邊加倍）**…**」（**p. 59**）而 **Maor** 所列出的參考文獻是 **Calinger** 編的 ***Classics of Mathematics***，以及 **Heath** 的 ***The Works of Arichimedes***。但是，在 ***Classics of Mathematics*** 中的阿基米德原文中，明明是從正四邊形開始，只是他把 **90** 度三等分，得 **30** 度，再將邊 **8** 等分，在一個 **360** 度的圓中，就得一正 **96** 邊形。這裡，就不曉得爲什麼 **Maor** 會犯這樣的錯誤？實在讓人不解！

最後，就是這一本書的翻譯問題了。這一本書由淡江大學數學系鄭惟厚教授翻譯，比起國內其他科普書籍的翻譯而言，他的翻譯算是問題很少的，只有幾個地方，可能也是很多科普書籍翻譯時常犯的錯誤：（**1**）**method of exhaustion** 通常譯爲窮盡法，或是窮竭法，而不是「窮舉法」（窮舉法類似歸謬證法，將所有的可能一一加以證明爲誤，剩下的那一個即爲真）。**(2)** 在 **85** 頁中將 **Diophantus** 翻譯爲狄歐范特斯，而在這一個的譯注說明中，卻又翻譯做丟番圖。**(3)** **"incommensurable"** 通常翻譯做「不可公度量的」而不是「不可通約的」，「不可公度量的」這個詞有其歷史脈絡在。**(4) "Fermat's Last Theorem"** 譯爲「費馬最後定理」，而不是「費馬大定理」。**(5) Maor** 爲本書校稿時 **(1993)**，懷爾斯確實才剛給出費馬最後定理的初次證明，但隨後被發現證明過程中漏洞，一直到 **1994** 年，懷爾斯才給出完整的證明。這一點譯者（尤其是一個常常翻譯科普書籍的譯者）似乎應該要知道，也應該在譯注中補充說明才是。[5]

---

[3] 見於卡丹諾的 *Ars Magna, ff. 65v.* 和 *66r.*，收錄於 D. Smith, *A Source Book in Mathematics*.

[4] 請參考 W. Dunham，《天才之旅》，台北：牛頓出版社。

[5] 請參考 Simon Singhh 著，《費馬最後定理》，商務出版社出版。

我這一篇書評，是從「略懂得數學史」的教師角度來批評的，所以，有些時候會顯得過於嚴苛。但是，若單就一般讀者，甚至是學校的數學教師而言，《毛起來說 ***e***》，不失爲一本有趣、材料豐富，能夠讓教學活動更爲活潑、生動的一本書。但是，若就一本書所背負的「教化」責任而言，它無疑是不合格的。畢竟，對以歷史來逃脫傳統數學知識中的冰冷、無聊的數學公式這一目標而言，「歷史」的解讀是很重要的。而「在脈絡」的解讀方式，對讀者在潛移默化當中的影響，亦是不能小覷。

優秀數學科普作品的指標

1. 知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)

- **(1) 認識論面向 (Epistemological aspect)** ☆☆☆☆
- **(2) 方法論面向** ☆☆☆☆
- **(3) 歷史或演化面向 (Historical or evolutionary aspect)：** ☆☆☆
- **(4) 哲學面向 (Philosophical aspect)：不適用**
- **(5) 教育改革面向 (Education reform aspect)：** ☆☆☆

2. 形式或表達 (Form or representation)

- **(1) 創新手法 (Innovative approach: new story on old stuffs)：** ☆☆☆
- **(2) 數學知識的洞察力 (Insight into mathematical knowledge: inspiring and revealing)：** ☆☆☆☆
- **(3) 忠實可靠的參考文獻 (Integrity with references)：** ☆☆☆☆
- **(4) 敘事的趣味性、可及性與一貫性 (Narrative in an interesting, accessible and coherent way)：** ☆☆☆☆
- **(5) 中譯本的品質（若需要）(Quality of Chinese translation version, if needed)：中文敘述、數學名詞的翻譯** ☆☆☆

3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form)

- **(1) 青少年層次 (for adolescence)：** ☆☆☆
- **(2) 一般社會大眾 (for general public)：** ☆☆☆

4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage)：

……它在所有數學公式中，鐵定可以列在「最美的公式」行列中。真的不誇張，如果把它改寫成 $e^{\pi i}+1=0$ 的形式，它就連結了數學中最重要的五個常數（也連結了三個最重要的數學運算—加法、乘法及指數運算）。

這五個常數分別代表了古典數學中的四支主流：算術可以用 **0** 和 **1** 代表；代數用 **i** 代表；幾何用 π 代表；分析用 **e** 代表。無怪乎有許多人從歐拉公式中找出各種神秘主義。卡斯納 **(Edward Kasner)** 和 紐曼 **(James Newman)** 在《數學與想像》中提到了下面這段話：「對皮爾斯這位十九世紀哈佛的頂尖數學家來說，歐拉這個 $e^{\pi i}=-1$ 的公式，簡直是一種啟示。看到這個公式之後，有天他對學生

說：「各位，這看起來真的很矛盾。我們沒法子瞭解這個公式，也不知道它代表什麼意義。可是已經有人證明出來了，所以我們確知它一定是正確的。」