

# 高中少女的數學夢

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

書名：數學少女（*Sugaku Girl*）

作者：結城浩（Hiroshi Yuki）

中譯者：莊世雍

出版社：青文出版社

出版年：2007

頁數：319

國際書碼：ISBN 978-986-209-372-6

關鍵詞：日本科普、分拆數、生成函數、泰勒展開式、數學小說、斐波那契數列、摺積、質數

**Keywords:** Japanese popular science, partition, generating function, Taylor expansion, mathematical fiction, Fibonacci sequence, convolution, prime number



## 一、前言

讀者大都熟知斐波那契數列  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$ ，而且也知道其後項比前項之數列  $1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 8/5, \dots$  會以黃金比  $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$  為極限。不過，如何從斐波那契數列的定義，推出它的一般項表現式

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

那就不太容易了。本書將生成函數（generating function）如何幫助我們達到此一目的，做了一個非常簡單明瞭的說明，充分地滿足了數學普及的需求，真是叫人大呼過癮！

本書是《數學女孩》的前編，日文版出版於 2007，中譯本隨即問世，可見這是一本相當受到矚目的小說。不過，由於印行中譯本的青文出版社在台灣以出版漫畫著稱，本書被挑選中譯的主要原因之一，大概是由於它所附的少女人物插畫的漫畫風格吧！

無論從漫畫或小說的面向來看，本書都是一本具有紮實數學內容的數學普及書籍，它所設定的讀者對象當然是高中學生。從「制式的」（conventional）數學學習觀點來看，本書一點也不討喜，因為它所涵蓋的內容，早已遠遠超出高中數學的範圍了。儘管如此，據說在日本，它就狂賣了十一刷，而促成作者結城浩書寫「續編」《數學女孩：費馬最後定理》。因此，本書的賣點何在？難道它的成功就只在於「數學＋小說」？或是「數學＋青春美少女」？還是結城浩所傳達的數學想像：「我對數學的『憧憬』－和男孩對女孩抱持的情感在某些地方有點相似」？

## 二、內容簡介

本書共分 10 章，其目次依序如下：

- 第 1 章 數列與規律
- 第 2 章 名為算式的情書
- 第 3 章  $\omega$  的華爾滋
- 第 4 章 斐波那契數列與生成函數
- 第 5 章 算術平均數與幾何平均數的關係
- 第 6 章 在米爾迦的身旁
- 第 7 章 摺積
- 第 8 章 調和數
- 第 9 章 泰勒展開式與貝塞爾展開式
- 第 10 章 分拆數

本書共有主角三人，<sup>1</sup>都是同校高中生：第一人稱的「我」是一位高二男生，他的同學米爾迦是一位數學才女，經常對他「發號施令」，至於蒂德拉（或蒂蒂）

<sup>1</sup> 在《數學女孩：費馬最後定理》中，則多了一位男生的表妹由梨（國中生）。

則是他的高一學妹，喜歡纏著男主角發問，但是，一直不清楚自己的數學潛力。他們三人之間的對話除了數學的解題探索、經驗分享之外，甚少涉及日常生活點滴，但是，對白中也洋溢著少男少女情懷，讓熟悉日本小說敘事的讀者深感親切。至於故事場景，則主要是學校圖書館與一個稱之為「Beans」的咖啡館。

第 1 章的主題是數列及其模式 (pattern) – 正如《數學女孩》一書，作者在本書一開始，也是利用數學才女米爾迦的數列問題來引起動機，這些數列依序如下：

1, 1, 2, 3, ...

1, 4, 27, 256, ...

6, 15, 35, 77, ...

6, 2, 8, 2, 10, 18, ...

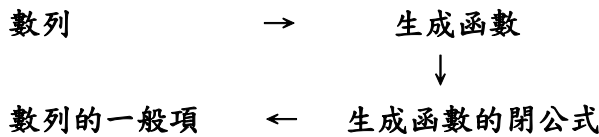
1, 2, 3, 4, 6, 9, 8, 12, 18, 27, ...

米爾迦的問題是：下一項是什麼？這些問題及其解答，都為後文的討論留下伏筆。

第 2 章的問題是：給定正整數  $n$ ，求其因數和。這是一個相當具有挑戰性的問題，由米爾迦所提出。不過，作者利用個例歸納，最後找到其公式。其中，藉著一些數學概念的引進，作者分享了一些學習心得，值得細細品嚐。尤其是在 2.10 節「數學公式的背後是誰？」，作者特別指出：「在算式背後都有一段歷史，當我們在讀算式的時候，就像是和無數的數學家格鬥，會花時間理解是一定的，當我們展開一道算式，就是超越了幾百年的時光；在我們面對算式時，我們都是小小的數學家。」這是本書的第一人稱「我」與學妹蒂蒂的對話。

第 3 章的主題是複數平面的  $\omega$ ，三次方程  $x^3 - 1 = 0$  的複數根。作者在本章中說明旋轉與振動如何關連到複數及其幾何表徵，再進一步指出隸 (棣) 美弗定理的幾何意義。其中，作者也針對此一複數平面的引進，而提出方法論的反思：「從整數到實數的數線，再從數線到複數平面，不斷地思考更高的次元。於是表現就變得簡單明瞭，可以說越簡單明瞭，就越象徵『理解』吧。」至於本章標題何以叫做「 $\omega$  的華爾滋」呢，那是因為「你從發現了單位圓的 3 個平分點  $\omega^3 = 1$  開始，接著發現  $\frac{2\pi}{3}$  的幅角，複數平面上的正三角形，還有  $\omega$  產生的三拍子旋轉，也在複數平面上看到了  $1, \omega, \omega^2$  的三人舞蹈……」。

第 4 章主題是生成函數 (generating function) 以及如何利用它來求斐波那契數列的一般項。為此，作者提供了一個「使用生成函數求出數列一般項」的旅行地圖：



最後，作者針對生成函數評論說：「生成函數是操作數列的有效方法。原因在於，我們熟知的函數解析方法都能在生成函數的國度裡發揮效用，而在函數中培養的技術也能活用在數列的研究中。」

第 5 章主題是算術平均與幾何平均之關係。其中，最值得注意的，是第 5.5 節「所謂讀數學」。在此，作者分享了他的高中數學學習經驗，部份內容請參考本文末所附的摘錄文字。

第 6 章主題是「微分與差分」以及「積分與和分」這兩個世界。他在第 6.4 節「往返於兩個世界的旅程」中，特別強調  $D$ （微分算子） $\leftrightarrow \Delta$ （差分算子）， $\int \leftrightarrow \sum$  之對比，還比喻說：「如果以  $\int$  是羅馬的 S， $\Sigma$  是希臘文字的 S 的話，對比就更有意思了，連續的世界是羅馬的，離散的世界是希臘啊。」由於本書是爲了紀念歐拉（或譯尤拉，Euler）而作，所以，作者在本章開頭即引述鄧漢（William Dunham）對歐拉的推崇：「解析（按即：分析學）是研究連續，數論是研究離散，而尤拉結合兩者。」

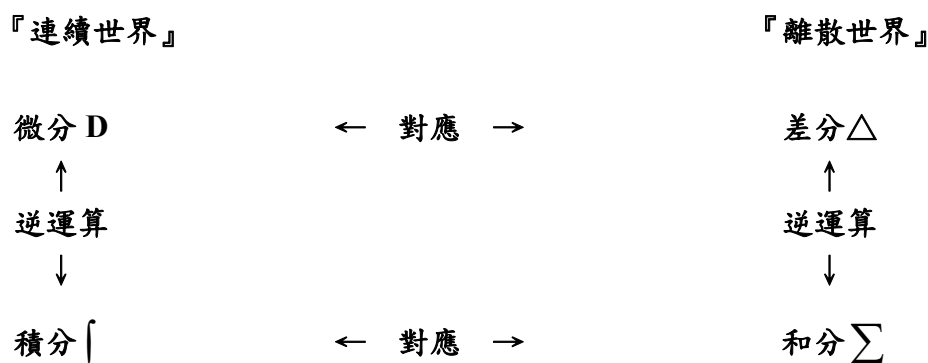
第 7 章主題是摺積（convolution），引起動機則是著名的卡塔蘭數（Catalan number）。所謂摺積，是指兩個無窮級數的乘積，其形式如下：給定兩個無窮級數  $\{a_n\}$  與  $\{b_n\}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ )，則它們的摺積被定義爲  $\{a_n\} * \{b_n\} = \{\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}\}$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ )。<sup>2</sup> 至於求摺積的方法，則是生成函數這個可以幫助發現的概念工具（conceptual tool）。在本章開頭，作者曾引述波利亞有關發現的感嘆：「使人感到完全沒有錯誤的完美解法，是怎樣才能想到的呢？使人感到充分展現事實的完美實驗，又是如何被發現的呢？到底要怎麼做，我才能想到或發現那些東西呢？」足見他對如何發現的重視！事實上，作者也針對生成函數評論說：「我和米爾迦使用生成函數求得斐波那契數列一般項，就像原本捧在手上快要散落的數列，被名爲生成函數的一條線串起來，那真是一次難以言喻的經驗。」

第 8 章主題是調和數以及其相關的黎曼  $\zeta$  函數  $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ 。首先，作者說

<sup>2</sup> 其實，這個級數的一般項也被稱爲哥西乘積（Cauchy product）。

明調和級數  $1+(1/2)+(1/3)+(1/4)+\dots$  如何發散，作者同時花了許多篇幅解說數列或級數之斂散意義。其實，在本章中，作者最想強調的，還是連續與離散這兩個世界的統整問題：

### 兩個世界，四種演算



如此一來，「連續的」對數函數與「離散的」「離散的」調和數之間，就可以進行下列的對比了：

$$\log_e x = \int_1^x \frac{1}{t} dt \quad \leftrightarrow \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \delta k .$$

此外，作者也在本章中利用摺積的概念與方法，以及黎曼函數與尤拉積的關係： $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} = \prod_{\text{質數 } p} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$ ，證明質數有無限多個。

第 9 章的主題是（正弦函數  $\sin x$  的）泰勒展開式與貝賽爾問題（求  $\zeta(2)$ ）。至於他的目的，顯然就是介紹尤拉如何發現  $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 。其中，作者還特別代數基本定理及其相關的根與係數關係。而有關此一貝賽爾問題解法的「重新發現」，作者刻意安排最缺乏數學自信的蒂蒂完成，在數學學習方面確是隱含深意。

第 10 章（也就是最後一章）的主題是分拆數（partition）。這種問題可以表示如下：給定面額 1 元、2 元、3 元、4 元……的硬幣，倘若必需支付  $n$  元，則組合的個數有幾種？本章內容即是利用生成函數求這一個組合數  $P_n$ 。不過，作者也證明對所有正整數  $n$  來說， $P_n < F_n$ ，其中  $F_n$  是斐波那契數列的一般項。最

後，作者先給出  $P_n$  的上界： $P_n < e^{K\sqrt{n}}$ ，其中  $K = \frac{\sqrt{6\pi}}{3}$ ，最後再給出其通式，於 1937 年由數學家 Hans Rademacher 所給出。

### 三、評論

筆者在評論《數學少女》時，不時參引《數學女孩》，這是因為我是先閱讀後者這本日文版較晚問世的中譯本。其實這兩本小說體例與風格相當一致，因此，我們對兩書的評價也非常接近。只不過本書主題是生成函數，至於《數學女孩》則是費馬最後定理。

評論這一本小說，首先浮現的問題是：作者為甚麼選擇納入這些數學知識？尤其有許多部份更是大學數學的主題。作者有能力將基本且深刻的數學知識，簡化到一般高中生可以理解的程度，足以顯示他不只受過非常嚴格的數學訓練，因而對於數學思維的掌握非常得心應手，同時，也對如何普及他的數學經驗深具信心。不過，更值得注意的，正如他在《數學女孩》所呈現，「本書適時地從高觀點 (advanced standpoint) 來歸納或提示一些數學 (抽象) 結構，讓讀者不至於迷失在徒然解題的迷魂陣中，而無法自拔。」此外，他在本書的「旅行地圖」中所進行的連結與對比，也一再地提醒我們數學是一個「有機的整體」(organic whole) — 數學史上的一些重大突破，往往需要「跨界」思維。至於他所依賴的概念工具，則是本書的「數學主角」— 生成函數！

另一方面，從小說敘事的觀點來看，本書作者所採取的「比喻」，似乎是高中男生對於數學世界 vs. 感情世界的一種未來憧憬：正如前引，「我對數學的『憧憬』— 和男孩對女孩抱持的情感在某些地方有點相似」。因此，在本書中，數學作為一種文學比喻就出現了另類風貌，值得我們進行評論時特別注意。

最後，請注意中譯值得商榷之處：廣義化 (p. 118)、閉公式 (p. 133)、整合同類項 (p. 263) 等用語可能直接採納日本漢語，台灣讀者並不熟悉，建議再版時依序訂正為：一般化 (generalization)、封閉式 (closed-form formula)、同類項合併。

## 優秀數學科普作品的指標

### 一、評價方式

指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

#### 1. 知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)

- (1) 認識論面向 (Epistemological aspect) : ☆☆☆☆
- (2) 方法論面向 (Methodological aspect) : ☆☆☆☆
- (3) 歷史或演化面向 (Historical or evolutionary aspect) : ☆☆☆☆
- (4) 哲學面向 (Philosophical aspect) : ☆☆
- (5) 教育改革面向 (Education reform aspect) : ☆☆
- (6) 與自然科學、人文社會乃至生活經驗的連結 (Connections with natural science, social sciences and humanities as well as daily experiences) : ☆☆☆

## 2. 形式或表達 (Form or representation)

- (1) 創新手法 (Innovative approach: new story on old stuffs) : ☆☆☆☆☆
- (2) 數學知識的洞察力 (或洞識) (Insight into mathematical knowledge: inspiring and revealing) : ☆☆☆☆☆
- (3) 歷史事實的洞察力 (或洞識) (Historical insight or a sense of history) : ☆☆☆☆☆
- (4) 異文化的啟蒙意義 (Enlightening in cultural mathematics) : 不適用
- (5) 忠實可靠的參考文獻 (Integrity with references) : ☆☆☆☆☆
- (6) 敘事的趣味性、可及性與一貫性 (Narrative in an interesting, accessible and coherent way) : ☆☆☆☆☆
- (7) 性別意識 (Gender) : ☆☆☆☆☆

## 3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form)

- (1) 兒童層次 : 不適用
- (2) 青少年層次 : ☆☆☆☆☆
- (3) 一般社會大眾 : ☆☆☆☆☆

## 4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage) :

「讀數學時最讓人覺得厭煩的就是不曉得目標在哪裡，就算解開問題也不曉得樂趣在哪裡，在家自己讀數學很無聊，也不曉得到底將來會在哪裡用到……不過問題也不是『到底學數學對將來有甚麼幫助』這種常常聽到的話，只是想知道剛剛學到的算式變形到底和昨天學過、明天將要學到的東西又有什麼關係，我希望能看到地圖的全貌，但是老師卻沒有讓我看見。」

「……」

「就好像是拿著小型手電筒到一個全黑房間的感覺，雖然可以用手電筒照明前進，但是光能照到的範圍卻很狹窄，無法知道自己到底走到哪裡。前後都是一片漆黑，能看到的只有光照到的一小部份而已，假如真的很困難的話，那也沒有辦法，可事實實際上算式的變化並沒有那麼難，所以我已經搞不清楚數學算式簡單還是困難了，單獨來看似乎很簡單，可是卻無法掌握整體，就像沒有地圖時的困惑和不安。」(頁 92)

「如康托爾所說『數學的本質是自由』，尤拉老師是自由的，他將無限大或無限小的概念靈活運用在自己的研究上，無論是圓周率的 $\pi$ ，虛數單位的 $i$ 或是自然對數的底 $e$ ，都是尤拉老師開始使用的文字，老師在當時無法橫渡的河上架了一座橋，就像在柯尼斯堡上架設新橋一樣。」(頁 262)