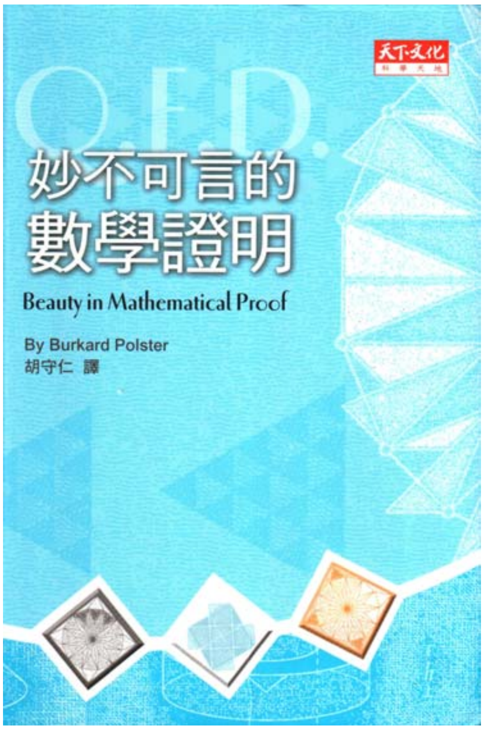
數普小品：妙不可言的 Q.E.D.

洪萬生
台灣師範大學數學系退休教授

書名：妙不可言的數學證明（**Q.E.D.: Beauty in Mathematical Proof**）
作者：波斯特（**Burkard Poslter**）
譯者：胡守仁
出版者：天下遠見出版股份有限公司
出版日期：**2006** 年
頁數：**122** 頁，精裝
定價：新台幣 **180** 元
ISBN：986-417-701-X
關鍵詞：數學美、Q.E.D.、證明、畢氏定理、劉徽
Keywords: beauty in mathematics, Q.E.D., proof, Pythagorean theorem, Liu Hui



一、前言

本書英文原名是 **Q.E.D: Beauty in Mathematical Proof**，作者是 **Burkard Poslter**（澳洲數學家），由 **Walker & Company** 出版，列入 **Wooden Books** 叢書，強調 **"Small Books Big Ideas"**，亦即在小品中看出大理念。

在本書序言中，作者說明書名 **Q.E.D.** 的意思：「**身為一位數學家，在證明完結之處，我寫下 Q.E.D.三個字母，宣稱我已證明此一定理為真。這是拉丁文 *quod erat demonstrandum* 的縮寫，意即『得其所證』。在一方面，Q.E.D. 是數學的真與美之同義詞，另一方面，它也代表看似遙不可及的一個面向。**」

儘管如此，本書力圖鋪陳一些雖然簡單，卻令人驚嘆的 **Q.E.D.**。

二、內容簡介

本書內容精簡，共有二十三單元（下文中的阿拉伯數字為我們所加），以及五個附錄，其目錄如下：

附錄五：多胞形

本書每一單元之篇幅最多四頁，而且圖形是主體，呼應「圖說一體、不證自明」（**proof without words**）的進路。既然如此，也由於 **Q.E.D.**的引申，所以，本書一開始自然就以「靠不住的真理」（**treacheorous truth**）為題，說明「為什麼要證明？」以及數學家所嚮往的證明之特性：「**證明要盡可能的簡潔、清澈、優雅而且見解深刻**」。第二單元以畢氏定理的切割證明法為題，不過，未提及古代中國的「出入相補」。第三單元的「又平又簡單」（**plane and simple**）主要簡介歐氏平面幾何中幾個與三角形及其外接圓有關的命題，為本書稍後的討論暖身，其中作者利用一頁圖形（頁 **21**）代表四個簡單的結果，並且指出「**由這四個結果，可以依照箭頭指示推導出左邊的各個定理**」。

第四單元的主題是「圓的奧秘」，作者運用了「由派到π」（**from pie to pi**）這樣一種俏皮的標題，來說明圓周率與圓周長之關係，譬如希臘天文學家埃拉托斯特尼（**Eratosthene**）如何利用地球周長求得直徑。參照這一史實，作者也提示了圓內接正多邊形的周長公式。第五、六單元主題是卡氏（**Cavalieri**，卡瓦列里）原理及其應用。其中，作者特別強調此一原理是「分而擊之」（**divide (into manageable pieces) and conquer)** 的範例之一。延續著第五單元的卡瓦列里錐體切割，作者特闢第七單元安排中國《九章算術》中的立體體積公式（如陽馬與塹堵），至於其引子則是古埃及的截頂方錐體（或截頂金字塔）－ 在古中國，則稱之為方亭或方台。不過，此處所引述的方法，並未完全還原劉徽（第三世紀注解《九章算術》的偉大數學家）之進路。還有，「鼈臑」在原書所附漢字被寫成「鼈腦」，中譯版也未改正。

第八單元主題是阿基米德如何找到球體積公式，傳說被刻在他的墓碑上的一個圓柱體及其內切球體之圖形。基於此，在第九個單元（標題「由裡向外翻」）中，作者就進一步給出球體積公式（與圓表面積之關係），為此，他先給出圓面積公式：

圓面積＝(1/2) × 圓周長 × 圓半徑

再據以類推：

球體積＝(1/3) × 球表面積 × 球半徑。

這是非常精彩的類推（**analogy**），前提是吾人必須先寫出類似上述形式的公式。

在第十單元中，作者利用「數學骨牌」來介紹數學歸納法，這是中學數學教師值得取法的一個教學進路。緊接著，他在第十一單元中，利用無窮調和級數的發散到無窮大之證明所運用的「重組證明法」，說明一個相當經典的悖論。

從第十二到十四單元，作者依序介紹古希臘即已深入探索的擺線與圓錐曲

線。針對圓錐曲線之定義，作者引進了單德林（**Dandelin**）的內切球體。還有，他也說明如何利用摺紙，來摺出這些曲線。另一方面，既然提及摺紙，作者就緊接著在第十五單元，介紹運用紙帶打結，摺出正五、六、七邊形之方法。

在第十六、十七單元中，作者利用正方形之切割進路，介紹冪次和（**power sum**）公式的一個十分精彩的證法。這兩單元顯然具體實踐了作者所謂的「**老模式，新看法**」（**a fresh look at an old pattern**）。

在第十八、十九單元中，作者利用歸謬法依序證明質數是無窮多以及$\sqrt{2}$是無理數。前者證法仿歐幾里得，後者則訴諸圖形，更能貼近古希臘進路。

第二十、二十一單元的主題是黃金比與費布納西（或斐波那契 **Fibonacci**）數列。在前一單元有關黃金比相關說明中，最精彩的莫過於：「**取三個黃金矩形，兩兩垂直，那麼它們的十二個頂點恰巧可以作為正十二面體的頂點**」。至於後一單元，則值得注意作者所指出的事實：費布納西數列與巴斯卡三角形之關係。

第二十二單元主題是有關凸多面體的歐拉公式，作者將圖論中的網絡方法稱為「修剪證明法」（**a proof by pruning**），顯然意在指出此一方法與吾人生活經驗的貼近。本單元是本書倒數第二個單元，或許他也意在模仿歐幾里得在其《幾何原本》的最後一冊（亦即第十三冊）證明只有五種正多面體存在吧！至於最後一個單元，則是針對三大尺規作圖題，如果允許使用其他工具，則可以「化不可能為可能」（**possible impossibilities**）！

最後，在本書的五個附錄中，作者針對前文中「畢氏定理」、「黃金比的表徵」、「直觀 **vs.** 嚴密：眼見未必為真」、「擬形數（**figurative number**）與延拓的巴斯卡三角形（**triangles of generality**）」以及「多胞形」（**polytopes of analogy**）單元，提出了更深入的討論與說明，由於比較不在意篇幅簡短，作者乃可盡情發揮。

三、評論

總之，本書雖然略有瑕疵，然而，瑕不掩瑜，作者的取材與書寫仍然極富創意，除了充分展現一般科普的訴求之外，本書對於中學數學課堂，也提供極精彩與深刻的啟發，值得數學教師參考借鏡。

在數學知識的呈現方面，本書針對許多 **proof without words**（圖說一體、不證自明），提供了極富洞察力之解說，儘管可能「落入言銓」，但是，卻對於讀者（尤其是教師）的心領神會，指出更多面向的切入點。這是本書的一大「賣點」，值得特別推薦！

優秀數學科普作品的指標

評價方式：指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

1.知識的實質內容 **(Intellectual substance of knowledge)**

(1) 認識論面向 ☆☆☆☆

(2) 方法論面向：☆☆☆☆

(3) 歷史或演化面向：☆☆

(4) 哲學面向：不適用

(5) 教育改革面向：☆☆

(6) 與自然科學、人文社會乃至生活經驗的連結：☆☆

2.形式或表達 **(Form or representation)**

(1) 創新手法：☆☆☆☆

(2) 數學知識的洞察力：☆☆☆☆

(3) 歷史事實的洞察力：☆☆

(4) 異文化的啟蒙意義：☆☆

(5) 忠實可靠的參考文獻：☆

(6) 敘事的趣味性、可及性與一貫性： ☆☆☆

(7) 中譯本的品質（若需要)：☆☆

3. 內容與形式如何平衡 **(Balance in Content vs. Form)**

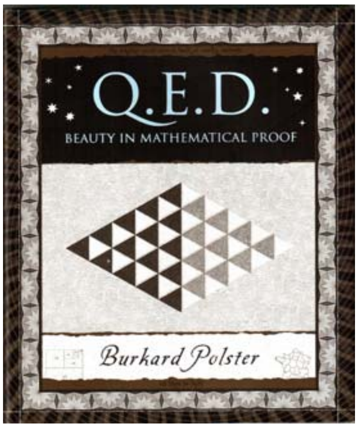
(1) 青少年層次： ☆☆☆☆

(2) 一般社會大眾：☆☆☆☆

4. 摘錄本書最精彩片段 **(excerpt from the most exciting passage)**：

愈深入探索數學的奧秘，我們就愈容易感覺到，數學的世界中，每樣東西似乎都能經由漂亮的關係，和其他所有的東西連結起來。例如費布納西數 **1, 1, 2, 3, 5, 8, …**與黃金比 $\varphi = (\sqrt{5} + 1)/2$，在本書討論過的許多其他主題中都不時肩並肩的一起出現。（頁 **99**）

本書以二維及三圍的正多胞形，也就是正多邊形與正多面體的討論作為起始。現在要說明如何利用類比的方法，猜測高維正多胞形的性質，來作為結尾。（頁 **114**）


Q.E.D.
BEAUTY IN MATHEMATICAL PROOF
Burkard Polster