

數學女孩的故事

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

書名：數學女孩 — 費馬最後定理 (*Sugaku Girl: Fermat no Saishu Teiri*)

作者：結城浩 (Hiroshi Yuki)

中譯者：鍾霓

審定者：洪萬生

出版社：世茂出版社

出版年：2011

頁數：349

國際書碼：ISBN 978-986-6097-01-0

關鍵詞：費馬、費馬最後定理、懷爾斯、數學女孩、數學小說、數學與性別

Keywords: Pierre de Fermat, Fermat's Last Theorem, Andrew Wiles, Math Girl, Mathematical Fiction, math and gender



一、前言

本書《數學女孩 — 費馬最後定理》是《數學少女》的續篇。《數學少女》原日文版名銜也稱為「數學女孩」，中譯本由青文出版社於 2007 年印行，封面按漫畫形式包裝。

本書封面則展示一位撐著下顎、垂著眼簾的帥氣知性美女，看來應該是在思索深刻的問題吧。就文類而言，本書是一本數學小說（mathematical fiction），

由四位主角（三女一男）的對話所組成。這四位中學生，「在放學後的午後，知性的學長、神秘的少女、開朗活潑的學妹、天真爛漫的表妹，矇矇懂懂的情懷，交織出最閃亮的青春……一切的一切，都是從星期六的午後開始……」。其中，這位知性的學長就是第一人稱的「我」，神秘的少女是指數學才女米爾迦，開朗活潑的學妹是指蒂蒂，至於活潑爛漫的表妹，則是「我」的表妹由梨。

本書主要訴求數學普及，讀者對象是高中學生（頂多再加上一些國中資優學生），然而，作者結城浩卻選擇了費馬最後定理之證明為主題，作為深具膽識的書寫挑戰，真是讓我們大感驚奇和意外。

有關費馬最後定理的普及書籍，國內目前有兩本中譯出版，分別是台灣商務印書館的《費瑪最後定理》以及時報文化出版的《費馬最後定理》。不過，這兩本無論是簡明版或翔實版，都採用了相關人物——譬如丟番圖（Diophantus）、費馬（Pierre de Fermat）、歐拉（Euler）、蘇菲·熱爾曼（Sophie Germain）以及安德魯·懷爾斯（Andrew Wiles）等等（簡略）傳記的敘事方式，同時，或許也因為原英文版是由美國書商所出版——據說美國出版商都認為科普書籍只要放進一個數學公式，就會減少五千本的銷售量，因此，他們有關數學知識的鋪陳，當然都盡可能避重就輕，略過數學論證或一般認知的面向。

然而，本書作者看來絕對不在這種關鍵處妥協！正如他的前一本數學小說《數學少女》一樣，在本書中，作者針對他認為必要的數學知識之說明，可以說極盡苦口婆心之能事，而且，他一點也不避諱抽象概念（及其符號）之引進。而這樣的一個有關內容之特色，當然就立刻區隔了本書與前兩本中譯英文書了。至於本書日文版的銷路呢，則從2008年8月3日初版發行之後，到了2010年3月5日為止，已經發行了第七刷了。可見，日本與美國在科普文化方面，呈現了相當大的對比。

現在，我們就接著簡介本書內容。

二、內容簡介

本書除了〈給讀者〉、〈前言〉以及〈尾聲〉、〈後記〉與〈索引〉之外，共有十章，其目次依序如下：

- 第1章 將浩瀚的無窮宇宙放在掌心上
- 第2章 畢氏定理
- 第3章 互質
- 第4章 反證法
- 第5章 可以分解的質數

- 第 6 章 交換群的眼淚
- 第 7 章 視髮型為模數
- 第 8 章 無窮遞減法
- 第 9 章 最美麗的數學公式
- 第 10 章 費馬最後定理

有關各章之數學內容，我們不妨瀏覽它們各自討論之數學主題或單元，即可略窺一二。第 1 章主題是時鐘或模數算術，作者利用具體例證，說明由特殊推論到普遍的數學方法論意義，並引述日本二十世紀偉大數學家高木貞治的話為結語：「高斯行過的道路，即有數學的進展。這一條路是歸納的。從特殊推論到普遍！這正是歸納的口號。」而這當然也一併強調：「只要能看透隱藏在問題裡的數字規則，就能夠一眼望穿自己無法去到的未來或世界的盡頭」。

第 2 章的主題是畢氏定理的數論版 — 畢氏三元數，因為這是為了費馬最後定理的討論，而進行暖身的必要的工作，尤其它們還對應到單位圓上的有理點。作者顯然利用此一連結，說明「原始畢氏三元數組有無窮多個」等價於「單位圓上的有理點有無窮多個」，從而指出「尋求方程式的解」（代數命題）與「用圖形捕捉事物」（幾何命題）之關連。

第 3 章主題是互質。作者在本章中，當然討論分數運算如通分與約分、最大公因數與最小公倍數以及這兩個概念之關係、質因數分解及其運用指數表現式之幾何表徵（geometric representation），而再次指出數論與幾何之連結：「深具內涵的幾何特性，讓我們的表現更為豐富。」。

第 4 章主題是反證法或歸謬證法，其例題是有關根號 2 為無理數之證明。作者在本章提供了兩個證明，並企圖說明這種證法在方法論上之意義（methodological meaning）。

第 5 章主題是可以分解的質數，其內含已經超越一般高中數學範圍了。在本章中，作者除了利用一、二次方程的解來定義新數之外，還為了引進高斯整數（Gaussian integer） $a+bi$ ，其中 a, b 為整數， $i = \sqrt{-1}$ ，而說明複數的幾何表徵及其運算意義，最後，在比較整數與高斯整數異同之後，說明「會粉碎」的質數之意義。

第 6 章主題是交換群（的眼淚）。正如前一章，本章內容也超越一般高中數學範圍，其各節單元有結合律、交換律、單位元、反元素、群與最小群，以及同態等等抽象代數的概念。這些當然都是為了第七章之後的抽象數學之引進，所做的預備工作。當然，作者也沒有忘記提醒讀者公設數學的意義：「由公設所給予的緘默制約。這個制約會讓集合的元素與元素之間相互緊密連結在一起，並不是

單純地將它們束縛在一起，而是有秩序地締結彼此的關係。換言之，也就是一構造會隨著公設所給予的緘默制約產生出來。」

第 7 章主題是（視髮型為）模數，以及由此引出的群、環、體等抽象代數結構。其中，針對模數 p 為質數時， Z/pZ 由剩餘類環變為體之討論，對於高中學生而言，則是非常抽象的主題。

第 8 章主題是無窮遞減法。在本章中，作者不憚其煩地說明了費馬如何利用這一方法證明 $x^4 + y^4 = z^4$ 沒有非無聊的（non-trivial）整數解，從而印證了費馬在丟番圖的《數論》（*Arithmetica*）拉丁版頁邊空白處所寫的所謂「費馬最後定理」，並非無稽之談。

第 9 章主題是最美麗的數學公式： $e^{i\pi} = -1$ 。作者顯然意在利用這個許多讀者已經熟悉的歐拉算式，來說明冪級數如何在指數函數與三角函數之間，搭起一座溝通的橋樑。當然，所謂的歐拉公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 與複數平面之關連。在本章末，作者引述吉田武《虛數的情緒》說明 $e^{i\pi} = -1$ 這個算式「是由最有用的兩個常數，即『納氏常數』及『圓周率』這兩種『虛數』居中結盟而成。」¹

第 10 章主題是費馬最後定理。作者為了讓讀者多少掌握一點有關此一偉大證明輪廓，特別提供了一個證明的概略。基於此，他還進一步介紹橢圓函數、模曲線與自守形式。最後，懷爾斯在橢圓曲線與自守形式之間成功地搭起一座橋樑，而完成了費馬最後定理的證明。

三、評論

本書在日本所以大受歡迎，顯然由於下列幾項特色。首先，在人物個性的塑造與故事情節的安排上，本書都相當成功地結合數學知識活動中的提問（questioning）與解題（problem-solving），這種高中或國中學生主角的「現身說法」，無疑地發揮了極大的親和力，甚至讓數學沒那麼機伶的一般學生，也容易產生共鳴。其次，本書所提供的解題或證明活動，也總是充分地配合人物個性與數學經驗，而呈現多面向的進路或方法，讓讀者可以從容分享。第三，本書適時地從高觀點（advanced standpoint）來歸納或提示一些數學（抽象）結構，讓讀者不至於迷失在徒然解題的迷魂陣中，而無法自拔。最後，作者也仿效類似網路「超連結」資訊的手法，²鼓勵讀者進行形式推論（formal reasoning），即使不知道個別命題或定理之內容（content）為何。而這，當然也呼應了上述所強調的數學知識的結構面向（structural aspects）之意義。

¹ 納氏常數是指歐拉數 e ，自然對數的底數，因為它是由納丕爾（Napier）所發明，故有納氏常數之稱。這是清代中國數學家的中譯，後來日本數學家襲用之。

² 譬如 David Joyce 所布置的 *The Elements* 網頁就提供超連結，讓讀者可藉以追溯其中命題在《幾何原本》結構中的邏輯地位（logical status）。

本書還有一項與性別 (gender) 有關的特色，那就是：儘管小說敘事的第一人稱是一位男生，然而，帶動整個故事發展的，卻是那三位女生：神秘的少女米爾迦、開朗活潑的學妹蒂蒂、天真爛漫的表妹由梨，尤其是才女米爾迦，她更是數學學習活動的發號施令者！這種性別書寫即使在一般科普創作中，也相當罕見，而這當然也很好地解釋了何以本書名銜稱做「數學女孩」。

另一方面，在本書中，儘管學校數學老師是一個「隱形的」角色，然而，作者提及他的時候，總是伴隨著一個十分適當、但卻與考試毫不相干的數學問題，將本書主角的課外與課堂學習可以連成一氣，從而讓本小說的敘事自然地呈現些許數學教育改革之關懷。

根據網路相關資訊，作者的興趣與工作是「寫程式」與「寫書」，相當喜歡花好幾年的時間，不斷地重複閱讀同一本書。此外，他也熱愛巴洛克音樂，尤其是巴哈的《賦格的藝術》與《音樂的奉獻》。他也會吹奏木笛 (recorder)，還喜歡看電影和散步。上述這些有關他個人的素描，相當具體地反映在本書的形式與內容上。一般而言，寫程式的人難免有一點「匠氣」，似乎比較不易被數學結構所吸引。然而，結城浩愛好巴洛克與巴哈的音樂 — 樂曲以簡單、對稱、優雅與結構謹嚴著稱，則相當可以解釋他在本書敘事時，何以那麼重視數學結構！

總之，正如同作者的《數學少女》一樣，這是一本極具「膽識」的數學小說。儘管作者書寫初衷在於數學普及，只不過，顯然由於日本科普文化的成熟度，使得他敢於運用具體的數學知識及其論證之鋪陳為進路，說明費馬最後定理的證明架構。為了不讓本書第九章這些相當「形式」的推論顯得空泛，作者在前八章中，就非常努力地引進必要的預備知識，其中所涉及的，都是讀者適當統整高中數學知識之後，即可理解的內容與方法。當然，那些材料所訴求的意義，才是作者最念茲在茲的學習標的。另一方面，本書文字優美、敘事流暢，相關的文學比喻 (literary metaphor) 也極富想像力，足見作者的書寫創作能力極佳。因此，本書無論從數學普及或數學小說的標準來看，都是十分優秀的作品。我們深信讀者一定可以從本書之閱讀，獲得相當深刻的數學經驗。而這，當然也是我極力推薦本書的主要原因。

優秀數學科普作品的指標

一、評價方式

指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

1. 知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)

(1) 認識論面向 (Epistemological aspect)：☆☆☆☆

- (2) 方法論面向 (Methodological aspect) : ☆☆☆☆
- (3) 歷史或演化面向 (Historical or evolutionary aspect) : ☆☆☆☆
- (4) 哲學面向 (Philosophical aspect) : ☆☆
- (5) 教育改革面向 (Education reform aspect) : ☆☆
- (6) 與自然科學、人文社會乃至生活經驗的連結 (Connections with natural science, social sciences and humanities as well as daily experiences) : ☆☆☆

2. 形式或表達 (Form or representation)

- (1) 創新手法 (Innovative approach: new story on old stuffs) : ☆☆☆☆☆
- (2) 數學知識的洞察力 (或洞識) (Insight into mathematical knowledge: inspiring and revealing) : ☆☆☆☆☆
- (3) 歷史事實的洞察力 (或洞識) (Historical insight or a sense of history) : ☆☆☆☆☆
- (4) 異文化的啟蒙意義 (Enlightening in cultural mathematics) : 不適用
- (5) 忠實可靠的參考文獻 (Integrity with references) : ☆☆☆☆☆
- (6) 敘事的趣味性、可及性與一貫性 (Narrative in an interesting, accessible and coherent way) : ☆☆☆☆☆
- (7) 性別意識 (Gender) : ☆☆☆☆☆

3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form)

- (1) 兒童層次 : 不適用
- (2) 青少年層次 : ☆☆☆☆☆
- (3) 一般社會大眾 : ☆☆☆☆☆

4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage) :

「命題的證明，也與永恆有關。所謂的永恆，指的是時間的無限性。已經被證明了的命題，在證明出該命題的數學家逝世之後，後進的數學家也會針對這個已經證明了的命題進行再證明。證明是相當嚴謹，且難以被推翻的。數學上的證明，可以說就像是超越時空的時光機器一樣。就像是時間過得再久也不會傾倒的建築物一樣。證明，是壽命有限的人類接觸永恆的唯一機會。」(頁 102)

數學是巨大的存在 我是這麼地認為。或許已經完成的數學的確是這樣的，但在還沒有完成之前的數學卻絕對不一樣。

寫出算式的話，就會留下算式。半途而廢的話，除了寫到一半的算式什麼都不會留下來。這是理所當然的事情。

可是，教科書並不會把寫到一半的算式刊出來。就像在建築現場，鷹架都已經被拆光收拾乾淨的狀態。所以說，只要一提到數學的話，就不免讓人聯想到是井然有序、有條不紊與完成了的印象。但事實上，數學不就是像工地現場一類雜亂無章的第一線產生出的嘛！？

再怎麼說發現數並製造出數學的，不都是人類嘛！數學，都是由我們這些渾身充滿破綻、不甚完美，稍有風吹草動就會心存動搖的人類，所發現並製造出來的。因為憧憬美麗的構造，因為傾心於永遠，為了一心捕捉到無限或什麼的人類，一路不斷地培育並延續著數學的命脈。

不是只有接受的數學，而是從自身所製造的數學。從小小的水晶碎片開始，一步步構築巨大寺院的數學。將公設放置於空無一物的空間裡，由公設導向別的定理的數學。從一顆小小的種子開始，最後構築成一個浩瀚的宇宙的數學。

米爾迦優雅的解答、蒂蒂的勤奮努力、由梨不漏掉任何所展現的條件。我對數學的印象之所以會改變，可以說受她們的影響甚巨。（頁 197）

附記：本文根據我為本書所寫的審定推薦序改寫。