

直指數學知識核心的模式

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

作者：齊斯·德福林 (Keith Devlin)

譯者：洪萬生、洪贊天、蘇意雯、英家銘

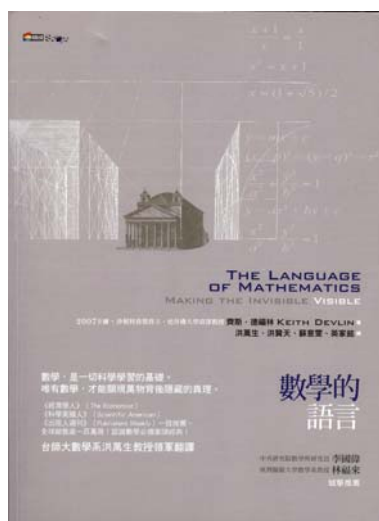
出版社：商周出版

出版日期：2011年03月06日

語言：繁體中文

ISBN：9789861206226

裝訂：平裝



何謂數學？有關這個問題的答案，當然沒有標準的版本。以最近台灣所出版的數學普及書籍為例，從新潮的《社會組也學得好的數學十堂課》，到古典的《數學是什麼？》，都企圖回答此一問題，而且，它們各自的作者顯然都提供了相當成功的現身說法。如此說來，本書《數學的語言》之賣點何在？難道這純粹只是出版社編輯想湊個熱鬧？

事實上，新潮也罷，古典也罷，前兩書的解說策略顯然都直接訴求了數學知識活動的參與，換言之，正如同數學家的諄諄告誡：想要理解數學是什麼，最好的進路就是做數學（do mathematics）！因此，針對前兩書，你必須備好紙筆，專注地跟著計算與論證，否則閱讀的效果自然大打折扣。然而，《數學的語言》卻完全不同，正如作者指出：本書是按照更大讀者群可以接近的一種格式，「述說數學是有關模式的鑑別與研究之故事」。既然如此，作者的書寫在論述（discourse）與敘事（narrative）之間，就力求折衷與平衡。而這，當然也允許

本書的形式與內容，為它自身的普及屬性，做了最有說服力的背書。

本書既然強調敘事，那麼，如何以「模式」(pattern)為主軸，或許是最佳抉擇。這是因為從一九八〇年代以來，數學家大都同意何謂數學的這一個新解：數學是研究模式的一種科學(a science of patterns)。如此一來，我們所熟悉的數學分支，就可以綜合統攝在模式之下了。譬如說吧，算術與數論研究數目與計算之模式；幾何學研究圖形之模式；微積分允許我們處理運動之模式；邏輯學研究推論之模式；機率論處理機會之模式；拓樸學研究鄰近與位置之模式；等等。而「為了傳遞數學的這個現代定義的一些訊息，本書將運用八個主題，涵蓋計算之模式、推論與溝通之模式、運動與變化之模式、形狀之模式、對稱與規則之模式、位置之模式、機會之模式，以及宇宙之基本模式。」無疑地，這種說法將數學從它傳統上被認定為最直觀的(或狹隘的)研究對象(如數目與圖形)解放出來，從而可以從容地觀照人世間無所不在的模式。

數學模式既然無所不在，那麼，我們掌握它的目的，顯然不僅止於針對「何謂數學？」提供一個具有「現代性」的回答吧。事實上，有關數學，還有另一個更根本的問題，那就是：掌握了這些模式作甚麼用？當吾人應用數學來研究某些現象時，數學的回報是甚麼？作者的答案是「數學讓不可見變成可見。」(Mathematics makes invisible visible.)而這一洞識，也正是本書英文版的副標題！譬如說吧，牛頓的數學幫助我們「看到」那些讓地球繞著太陽旋轉，以及造成蘋果從樹上墜地的不可見之「重力」(gravity)——儘管重力概念是不是一個權宜的假設，他也始終說不清楚！又如，吾人利用十九世紀馬克士威爾所發現的電磁方程式，藉以讓那些不可見的無線電波，變成可以「看到」。還有，語言學家喬姆斯基使用數學去「看」，而且描述我們認定為文法語句的不可見的、抽象的文字模式，於是，他得以將語言學轉變成為一門蓬勃發展的數理科學。

更具體地說，本書作者利用了八章的內容，從計數(含算術與數論，第一章)、心智推論(第二章)、運動現象(第三章)、圖形(含幾何、對稱與拓樸學，第四、五、六章)、機會事件(第七章)到物理宇宙(第八章)，分別提煉其各自模式，進而據以說明這又是如何促成相關數學的巨大進展。現在，我們就針對這八章內容，提供一個極其簡要的說明。第一章的重點是質數相關理論(含密碼學之應用)與費馬最後定理的簡介。有了這個預備，作者在第六章有關拓樸學的深入討論之後，再回過頭來，完結費馬最後定理的故事。其實，在第一章中，作者也提及抽象化概念之為大用，尤其是數學仍然處在搖籃階段的時候。

第二章針對數學證明的嚴密性所需之邏輯推論模式，進行一個歷史的回顧性說明。其中極為重要的故事情節，有康托爾發明集合論之後所引發的羅素悖論，

對數學基礎所造成的深層危機，以及希爾伯特積極回應的形式主義之崛起，乃至於哥德爾不完備定理的最終致命一擊。不過，最有茶餘飯後談助的插曲，則莫過於數學家如何利用「模式」，找到隱藏在書寫文字中的「指紋」。

第三章討論數學家如何馴服無限概念，然後，據以建立有關運動與變化之模式。同時，爲了微積分的極限理論之完備，作者也論及實數與複數之歷史發展。接著，作者再從解析數論切入，說明黎曼 ζ 函數如何爲我們揭開質數的隱藏模式。至於第三章最令人意想不到的內容，則是作者告訴我們：應用傅氏分析學，只要給定足夠多的音叉，我們就可以演奏貝多芬第九交響曲。

第四章主題是歐幾里得《幾何原本》，以及所延伸之非歐幾何、尺規作圖與五種柏拉圖正多面體等單元。此外，作者還提及圓錐曲線、解析幾何、射影幾何以及高維度幾何學之應用。而「最麻辣的」情節，則莫過於作者提及柏拉圖如何說明五個正多面體與其宇宙生成論之關係，以及無獨有偶的克卜勒之論證：恰好只有六個行星的原因，是每個行星和下一個行星之間的距離，必定和一個特定的正多面體有關，而正多面體剛好只有五個。當然，作者的評論更是發人深省：「就細節而言，柏拉圖和克卜勒兩人對於原子論的想法都是錯誤的。但是，就尋求以數學的抽象模式理解自然的模式之意義而言，他們的研究所秉持的傳統，直到今天都還是具有高度成效的。」

第五章的主題是群的模式與底蘊美學的對稱之密切關連，這是因爲正如作者指出：對稱的研究，捕捉了形狀更深刻、更抽象的一個面向。而從變換觀點切入，群之概念當然就堂而皇之地走進來了。因此，在本章中，作者雖然提及許多與美學有關的數學如地磚鑲嵌、壁紙圖案、雪花與蜂巢結構，甚至於格子與球裝填問題等等，然而，群結構所表現的模式，顯然才是正道。

在第六章一開始，作者就運用一九三一年設計的倫敦地下鐵地圖，以及在科普書籍中相當膾炙人口的克尼斯堡七橋問題，來引進拓樸模式之概念。其他單元如莫比烏斯帶、甜甜圈與咖啡杯、紐結分類，乃至四色定理等等，也都是非常「性感的」(sexy)題材。當然，代數理論（尤其是有關群與多項式）協助打造研究工具，也是非常具有啓發性的敘事。最後，基於橢圓曲線的拓樸模式之深刻掌握，英國數學家懷爾斯終於證明了三百多歲的費馬最後定理。

在第七章中，作者從機率論的誕生，談到巴斯卡有關「機會的幾何模式」之研究。再論及壽險與機率之關係，以及期望值之研究如何啓發吾人考慮人爲因素。其他如鐘形曲線、統計推論以及平均人的概念，都有助於機會的抽象模式之探討。此外，在金融數學的脈絡中，作者也說明經濟學家如何利用數學，幫忙吾人在高度易變的權證交易市場中做出優選。

正如第三章一樣，第八章的主題也是物理學中的數學模式。不過，本章顯然意在強調：儘管數學在物理上的應用，具有悠久歷史的優良傳統，但是，過去十幾二十年不斷發生的，卻是另一個方向的工作：將物理中的概念與方法應用到數學上並取得新的發現。

總之，本書內容在凸顯模式旨趣的同時，誠如作者所說，也兼顧了數學的歷史發展與它當前的廣度，因此，他乃能將數學「形容成為人類文化的一個豐富而生動的成分」。基於此一進路，作者在書寫時，就充分地發揮了他自己的數學(史)洞識，相當值得推許。譬如說吧，在評論微積分的極限理論之發展時，作者對於牛頓與萊布尼茲 vs. 哥西在數學物件上的認知對比，就是相當深刻的觀察，十分有助於我們理解十七到十九世紀的分析學之算術化 (arithmetization of analysis) 之歷史發展。

最後，我們必須提醒讀者：本書由於論及當今數學發展的實質內容，因此，非常抽象層次的理論之鋪陳，遂變得完全不可避免。同時，也由於「抽象概念的認識與表現它們的適當語言之發展，真的是一體兩面」，所以，閱讀本書時雖然不必預設和數學知識或能力，但是，發掘意在言外的資訊之閱讀習慣，卻是十分必要。值此閱讀力即國力的呼聲中，如何培養穿透字面、直指知識核心的能力，或許本書所念茲在茲的模式之掌握，就是最佳的試金石了。