

推薦《數學是什麼？》

洪萬生

台灣師範大學數學系教授退休

書名：數學是什麼？（上）

作者：瑞赫德·庫蘭特、賀伯斯 (Richard Courant) · 羅賓斯 (Herbert Robbins) · 伊恩·史都華 (Ian Stewart)

譯者：容士毅

出版社：左岸文化，新北市

出版資料：平裝，400 頁

出版年：2010

ISBN: 978-986-6723-46-9

數學家兼科普作家史都華為本書修訂版寫序時，特別指出：「合乎邏輯形式的數學 (formal mathematics) 就像拼寫與文法 – 正確地使用局部性的規則。有意義的數學 (meaningful mathematics) 有如新聞工作 (journalism) – 它報導一個有趣的故事。但又不像某些新聞報導，因為它的描述一定要真實。最好的數學就像文學 – 它把故事栩栩如生地帶到你的眼前，從而無論在理智上或情緒上使你捲入其中。」這個堪稱是史都華的現身說法比喻，生動地呼應了庫蘭特所謂的「數學作為一個有機的整體結構」之重要意義。形式數學固然重要，解題更是不遑多讓，然而，唯有類似敘事 (narrative) 的知識活動，才是掌握數學整體結構的正道。

一九六七年，我進入台灣師範大學數學系就讀時，經由翻版書而得以略窺本書內容 – 比起史都華，晚了四年的「初體驗」。不過，由於閱讀本書相較於譬如英文版微積分教科書，顯然需要更成熟的閱讀（或數學）經驗 – 對於數學主修學生而言，本書所訴求的，正如前述，絕對不僅止於解題，它的更高尚要求，乃是數學知識的結構與意義之掌握，因此，「制式學習」如我者一直無從深入。當然，缺乏勝任可靠的導讀，也是另一個主要的原因。

現在，本書有了認真的中譯者與編輯，再加上目前國內關數學普及閱讀活動之推廣，它的影響力絕對可以預期。其實，我在初次接觸本書大約十年後，開始有計畫地自修數學史，從而得知庫蘭特與哥廷根學派克萊因 (Felix Klein) 與希爾伯特 (David Hilbert) 之深厚關係。這是我從數學史面向，體會到庫蘭特的數學認識論的一段經歷。此外，我在台灣師大也曾以庫蘭特的微積分與分析學著作（與 Fritz John 合撰）為教材，在課堂中與學生實際地分享庫蘭特的數學經驗。有了這兩個面向的體驗之後，我還不時地回頭重溫本書論述，充分體會其中所洋溢的傑出數學家之深刻洞察力。

本書範圍遍及〈自然數（含數論）〉、〈數系（有理數、實數與複數、代數數與超越數）〉、〈幾何作圖（或尺規作圖）與數域代數〉、〈射影幾何、公理體系與非歐幾何〉、〈拓樸學〉、〈函數與極限〉、〈極大與極小〉、〈微積分〉，以及史都華所增補的〈數學在近代的發展〉。本書 1941 年第一版目次共有八章及其補充，1995 年，史都華代為增寫 XI 章〈數學在近代的進展〉，作為本書首版之後，二十世紀數學蓬勃發展之補充說明。綜合上述可見，本書作者企圖運用這些概念與方法的初等進路，來說明「數學是什麼？」其中有關數系之介紹，作者納入代數數與超越數之概念，顯然意在呼應數系結構與無限集合之關連。另外，有關幾何作圖主題之引入，則是讓解析幾何在幾何與代數之間所扮演的搭橋角色，賦予了更豐富的想像。同時，其中所底蘊的變換 (transformation) 想法，更是讓下兩章的幾何學與拓樸學之現身，顯得水到渠成。其實，根據克萊因的埃爾蘭根提綱，變換 (群) 作為一種具有現代性 (modernity) 的概念工具 (conceptual tool)，不僅幫助我們刻畫了各色各樣的幾何學 (含拓樸學)，而且，它也從整體結構面向，大一統了絕大多數的幾何學 (geometries)。在本書中，庫蘭特具體實踐了克萊因這種取精用宏的進路，非常值得愛好數學者，尤其是數學教師取法。

事實上，正如庫蘭特的期待，本書也非常適合中學數學教師用以提升教學素養。這是因為作者注意到當時的數學教學，有一些已經退化成為解題的空洞演練，這或許有助於形式能力 (formal ability) 之發展，但卻無從導致真正的理解或更大的智識獨立性 (intellectual independence)。針對這一點，庫蘭特指出：「中學的教師也許發現，在幾何作圖和極大與極小兩章的材料對校中若干社團或優等生來說是有幫助的。」不過，正如上一段所指出，本書第 VI、V 章對於中小學教師素養而言，也至關緊要，這是因為它們補全了結構性面向 (structural aspects) 的數學經驗。其實，如果教師願意考慮將這些材料適當剪裁，引進至少是資優生的課堂，那麼，他們的數學本能，一定可以從平板無趣的空洞解題活動甦醒過來，爬上結構的階梯，從頂端俯瞰數學的宏偉大廈，然後大呼「不虛此行」！

對於科普界的作者、譯者與編者來說，本書絕對是必須永遠置於案頭的參考用書。這是因為庫蘭特寫作本書的初衷，就包括了數學普及的考量。儘管如此，他對於內容空洞、包裝花俏的科普讀物，還是相當嚴肅地吐槽：「知識之攫取不能單靠間接的手段。對數學的理解是不可能憑輕輕鬆鬆的娛樂方式來傳達，這與音樂教育無法透過最出色的新聞報導，以傳授給那些從來沒有深入聆聽音樂的人一樣。」其實，就本書的內容與形式而言，它的主題包羅萬象，呈現手法紮實有趣，同時，作者也在自然而然的情境中，分享他們的認識論與方法論之反思。所有這些，當然都足以降低閱讀門檻，何況各章彼此之間在內容上，有著相當程度上的互不依賴，因此，讀者盡可隨性地閱讀就是了。

最後，對於數學主修的學生來說，我尤其要指出：本書誠如史都華所說的，的確是一部數學經典，因此，非常值得將它列入必須精讀的書單之一。三年前，本系大一新生仍有必修「數學導論」課程之規劃，而我當時忝為系主任，必須協助開授此一課程，遂決定採用本書為教材（本書修訂版於 1996 年問世）。只有短短一個學期的時間，當然無法涵蓋太多單元，於是，我只好盡量利用時間與學生分享數論、數系、幾何作圖以及射影幾何的一些基本概念和方法。當然，結構性面向知識始終是我再三舉例說明的重點。另一方面，如果數學主修的大四學生，有機會研讀本書，為四年所學進行一個綜合性的回顧或反思，那麼，他們或許可以更清楚地看到數學知識的一個比較全面的圖像。

總之，本書是一本可以讓多方讀者各取所需的一本導論型的數學經典。一般讀者或許在乍看之下，會覺得本書納入過多技術性的細節，而不適合一般人閱讀。這個觀察無可厚非，因為它本來所訴求的讀者並沒有「一般化」到那種程度。然而，要是讀者可以暫時忍受或撇開這些技術性的困難，轉而投入本書內容所關連的一些認識論議題之論述，那麼，史都華針對數學知識本質所謂的「不真實的真實」(unreal reality)，就會變得鮮明地立體起來。當然，如果你有充分的耐心或訓練，足以亦步亦趨地遵循著本書論證，那麼，你還是需要在作者敘事或議論的地方，多作一點時間的駐足：再多想一下，那些究竟如何連結到作者所謂的數學！

何謂數學？有關這個問題的回答，在可預見的將來，想必仍然會激發許多數學家或科普作家的雄心壯志。不過，話說從頭，這部七十歲的經典，卻早已為我們樹立了典範！

附記：本書中譯本（下）即將在 2011 年 1 月出版。