淺 談 數 學 與 數 學 建 模

蔡天鉞
台灣師範大學數學系退休教授

數學在各個領域受到廣泛的重視，對一個國家的科技發展亦有深遠的影響。對大部分的人而言，學習數學的目的，是為了解決其所面對的數學問題，而非要成為一個數學家。就如對大部分的人而言，學習語言目的是要學會如何與人溝通、如何充分表達自己的想法，或欣賞文學作品，而非成為語言學家、文學家等。如果，學習數學的目的，是為了解決其所面對的數學問題，那麼我們對數學的內涵與如何應用數學似乎應有些基本的認識，本文試著對這兩個問題作一簡單介紹。

首先，我們試著介紹數學的內涵。由於每一門學科都有其探討的對象與探討的方法。那麼，數學探討的對象是什麼？探討的方法又如何呢？一般而言，數學常在探討一些抽象化後的東西，將這些東西收集在一起形成所謂的集合。對於數學的兩大領域：代數與分析，簡略說明如下。

對於單一集合，我們考慮如何表示集合、元素個數與子集合等問題。對於兩個集合，則考慮它們是否相等、如何結合在一起：運算（交集、聯集、差集 、積集）與運算性質（結合性、交換性、分配性）、元素間的對應關係**(**函數**)**等問題。

對於單一集合 **S**，我們更進一步討論元素間的關係，其方法是：

1. 引入函數 $f:S\times S\to S$ ，稱為二元運算，將集合間的元素結合成新的元素，定義二元運算的一些性質：結合性、單位元素、反元素、交換性、分配性**(**兩個二元運算**)**，再根據這些運算性質定義群、環、體等。

例如：討論群$(G,\otimes)$時，

(1) 會考慮$(G,\otimes)$是否為交換群，若不是，則考慮

(a) 會與每一個元素都可交換的元素，這些元素所形成的集合稱為群的心 **(center)** $Z(G)=\{x\mid x\otimes g=g\otimes x,\forall g\in G\}$ 。

(b) 會與每一個元素都可交換的子群 $N, Ng=gN,\forall g\in G$ ，稱為群的 正規子群 **(normal subgroup)**。

(2) 兩個群間的函數，則會考慮函數是否會保持群的運算

$f:(G_1,\oplus)\to(G_2,\otimes)$， $f(x\oplus y)=f(x)\otimes f(y)$

稱為同態 **(homomorphism)**。另外，兩向量空間的線性變換**,**亦是相同的

想法。

2. 利用函數$d:S\times S\to R$：描述元素（點）與元素（點）間的距離。

d 稱為距離，滿足下列性質

(i) $d(x,y)\geq 0$

(ii) $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$

(iii) $d(x,y)=d(y,x)$

(iv) $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

(S,d)稱為距離空間。 例如：**(R,** d **), d(x,y)=|x-y|**。有了距離的概念，就可引入極限，描述一點列的分布情形，是否會集中到某個點或某幾個點？可以討論兩個距離空間的函數是否連續？這為分析學的主要工具。

例如：從實數到實數的函數：$f:[a,b]\to R$，由於實數有代數結構（體）：加（減）乘（除）運算，又有距離（絕對值），因此，可以定義

(1) 微分：$\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c},c\in(a,b)$（減、除與極限）

(2) 積分：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(t_k)(x_k-x_{k-1})$，（加、乘與極限）其中

$P=\{x_0,x_1,x_2,...,x_n\},x_0=a,x_n=b$為$[a,b]$的一分割，$t_k\in[x_{k-1},x_k]$

微分可用來描述一些與動態或瞬間變化率有關的問題（如後文介紹的，例七生態問題，與例八策略問題）。積分可用來求面積。微積分基本定理則將微分與積分連結在一起。微分與積分兩者間的關係猶如加法與減法或乘法與除法互為逆運算。

在積分定義 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(t_k)(x_k-x_{k-1})$中，

(1) x_k-x_{k-1}為區間$[x_{k-1},x_k]$的長度，因此，對於數線上的任意子集合是否亦可給予某一個量？由此延伸出測度 **(measure)** 的概念。

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n}f(t_k)(x_k-x_{k-1})$（長方形面積和）為階梯函數$f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}f(t_k)\chi_{[x_{k-1},x_k]}(x)$的積分。

因此，積分的定義可描述如下：

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(t_k)(x_k-x_{k-1})\overset{def}{=}\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)dx$$

即透過階梯函數f_n逼近函數f與階梯函數f_n的積分（長方形面積和）來定義函

數 f 的積分。

一般而言，設 $f_n, f:[a,b]\to R$ 且 $f_n \to f$ 為逐點收斂時，

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

並不一定會成立，但當 $f_n \to f$ 為均勻收斂時，則會成立（高等微積分重要課題之一）。

(3) 上述積分稱為黎曼 **(Riemann)** 積分，是將定義域加以分割。其實，亦可考慮將值域加以分割，此時，將形成所謂的簡單函數 **(simple function)** f_n（需利用測度的概念來定義），在某些條件下，這些 簡單函數 f_n 將逼近原函數 f，再利用這些簡單函數 f_n 的積分來定義函數 f 的積分，這種新的積分定義方式稱為 **Lebesque** 積分。

測度與 **Lebesque** 積分為實變數函數論討論的主題之一，為 **Fourier** 級數、小波理論、泛函分析與機率論等學科的基礎。

對於數學思考方式有了些基本認識之後，我們再繼續介紹如何應用數學，其基本想法是數學建模。

前面提過，對一般人而言，學習數學的主要目的是為了解決他們所遇到的一些數學問題，而非成為數學家。因此，如何將所遇到的問題轉換成數學問題：數學建模，就成為一個重要課題。其流程如下：

真實世界裡的問題（自然現象、工程、物理、**…**）	→	數學模型（問題）	→	求解、檢驗與修正數學模型（解釋解的意義並與實際資料作比較，若不合理則修正模型）	→	分析使用（預測）

傳統的數學教育只著重在數學模型（問題）的解決，忽略了其他部分。以致於許多學生往往不知道他們所學到的數學究竟有何用途，可以解決什麼樣的實際問題，這實在是非常可惜的事。最近，數學教育界相當重視此一問題。請參考：***Undergraduate Programs and Courses in the Mathematical Sciences: CUPM Curriculum Guide 2004*****, A Report by the Committee on the Undergraduate Program in Mathematics of The Mathematical Association of America, September 22,2003**。

將實際問題轉換為數學問題，需清楚的描述假設、瞭解系統中重要的概念、將問題抽象化與簡化、找出所有的變數與參數與各個量間的關係，最後再由所描述的關係導出數學關係式（方程式或方程組），對於這些關係式（方程式），可利用等號兩邊的單位是否一致,初步判斷每個關係式是否合理。（請參閱：劉來福、曾文藝編著：《數學模型與數學建模》，北京師範大學出版社, 1997）當然，這個過程並非都是簡單的問題（如：例三）。底下，介紹幾個例子。

例一：雞兔同籠。設籠子裡有雞與兔子，共有 **30** 隻腳、**10** 個頭，問雞、兔各有幾隻？

雞兔同籠問題或許是一人為的問題，可是當我們將其改為買鉛筆和原子筆時，假設鉛筆每支 **2** 元、原子筆每支 **4** 元，共花了 **30** 元，買了 **10** 支，試問各買幾支？似乎就更實際些。兩個問題似乎是不同的問題，卻可以具有相同數學形式。

在小學時，解此問題完全是以邏輯思考的方式來處理。假設籠子裡全部是雞，所以共有 **20** 隻腳，比實際上的 **30** 隻腳少了 **10** 隻腳。這是因為把每隻兔子都算成兩隻腳，每隻兔子少算兩隻腳，所以，兔子應有 **5** 隻，雞亦應有 **5** 隻。

可是，在國中時，學過方程式（組）、加法與乘法的運算性質。因此，根據每隻兔子 **4** 隻腳，每隻雞 **2** 隻腳這一事實，可將此一實際問題轉換成方程組（數學問題）。設兔子有 **x** 隻，雞有 **y** 隻，則

$$\begin{cases} 4x+2y=30 \\ x+y=10 \end{cases}$$

第一個方程式,等號兩邊都表示幾隻(腳), 第二個方程式,等號兩邊都表示幾個(頭).再利用加法與乘法的運算性質（代數）解此方程組。

到了高中階段，可將其表示為

$$x\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30\\10\end{bmatrix}$$

因此，求 **x** 與 **y** 的值，即求向量$\begin{bmatrix}30\\10\end{bmatrix}$是否可表示為向量$\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$與向量$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$的線性組合？或向量$\begin{bmatrix}30\\10\end{bmatrix}$是否在由向量$\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$與向量$\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$所張開的平面上？如果，向量$\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}$

與向量$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$可以構成一組基底，則答案是肯定的。

例二：瞬間速率。設某人沿著福爾摩沙高速公路，由台北開往高雄，共開了 **5** 個小時 **400** 公里，試說明在高速公路上，必有某一瞬間的速率為 **80** 公里。

此問題亦可以邏輯思考的方式解決：若任何時間，速率都低於 **80** 公里，則不可能 **5** 個小時開了 **400** 公里，表示必有某些時間的速率高於 **80** 公里，可是當他通過收費站時，速率必須降至零或 **50** 公里以下（**ETC** 車道），由於速率是隨時間作連續變換，因此必有某一瞬間速率為 **80** 公里。

可是，當您學過微積分，由微分均值定理知：「必有某一瞬間速率等於平均速率」，所以，必有某一瞬間速率為 **80** 公里。

上述兩個例子說明，在不同的階段學到不同的數學知識，讓我們對於同一個實際問題或數學問題，有不同的思考與處理方式。當然，並非所有的實際問題都像上面的例子，很快地就可找到適當的數學模型與知識加以解決。底下的例子，從實際觀察到的自然現象，數學模型的提出，到問題的解決，共花了一百多年的時間。

例三、孤立子 **(Soliton)** 新的數學概念的誕生。在 **1834** 年，**John Scott Russell** 在英國愛丁堡的一條河流，發現有一個水波沿著河流前進並不會消失。後來在實驗室模擬，直到 **1895** 年，由 **Korteweg & de Vries** 提出此一問題的數學模型：稱為 **KdV** 方程式

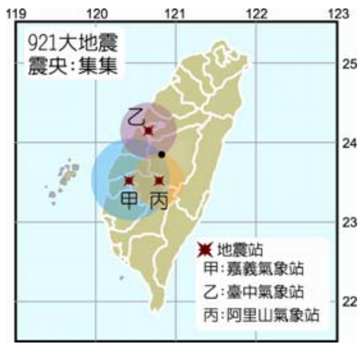
$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

此方程式為一非線性偏微分方程。最後在 **1967** 年，由 **Gardner, Greene, Kruskal, Miura** 四個人提出解決的方法，稱為散射、逆散射理論（**Method of solving the Korteweg-de Vries equation, Phys. Rev. Lett. 19, pp. 1095-1097**）。解決的過程需用到量子力學中的 *Schrödinger* 方程。而量子力學是在 **1900** 年代才產生的。亦即若無量子力學，此問題可能需要更多的時間或永遠無法獲得解決。這方程式的解稱為孤立子。其特徵是：**(a)** 波峰較高的孤立子，其速率較快。**(b)** 兩個波峰高度不同的孤立子，若波峰較高的由後面追趕波峰較低者時，當它們碰撞分開之後，還是各自保持原來的高度與速度。這些都和一般的水波的性質不同，為一非線性現象。

底下例四與例五，學過數學的人大概都知道的結果，可是，卻可能忽略了其

應用。

例四：三圓共點。這個概念（數學模型）學數學的都知道，地震學家就是利用三圓共點的概念來找出震央：

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>民國 **88** 年 **9** 月 **21** 日凌晨 **1** 時 **47** 分 **15.9** 秒發生了芮氏 **7.3** 級地震，震央南投縣集集鎮，因此又名「集集大地震」，這是一百年來，台灣最嚴重的一次地震.</td>
</tr>
</table>

（取自《全華高中數學》第三冊，另請參閱：中央氣象局，《地震百問》）

例五：雜訊的去除。在高中學習三角函數，大都把焦點放在三角測量上，而較少注意到 **cos(*nt*)** 和 **sin(*nt*)** 都是頻率為 ***n*** 的函數及其在數位訊號上的應用。

一般訊號可分為類比訊號、數位訊號，從數學的觀點來看：類比訊號為時間的連續函數，由於電腦無法處理無理數（無限的非循環小數），因此，將類比訊號取樣、量子化（類似於四捨五入）後得到數位訊號，數位訊號為一數列。

另一方面，一個訊號亦可視為由不同頻率的訊號組成的，此即 **Fourier** 級數：

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}[a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)]$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)dt$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(nt)dt$$

一般而言，雜訊的頻率較高，因此，當要處理雜訊時，只需保留 **n** 較小的部分而將 **n** 較大的部分去掉，即可達到去除雜訊的目的。注意：上式 a_n 與 b_n 分別為函數 f 與 $\cos(nt)$ 與 $\sin(nt)$ 的內積.這與在 R^2 上取向量 $\vec{i}=(1,0),\vec{j}=(0,1)$ 為正交基底,則對 R^2 上的任一向量 $\vec{v}$ 都可表示為

$$\vec{v} = <\vec{v}, \vec{i}> \vec{i} + <\vec{v}, \vec{j}> \vec{j}$$

的想法是一樣的差別是：一為有限項的和,另一為無限項和（須考慮收斂問題）。

由於 **Fourier** 級數在應用上的一些缺陷，例如：兩個看起來很不一樣的訊號其 **Fourier** 係數卻相同。當一個訊號局部上發生變化時，其 **Fourier** 係數卻可能沒有改變。由於這些問題，大家都想找到能彌補這些缺陷的方法。[1]幸運的是，自 **1980** 年代開始，數學界有一新的結果產生：小波理論，此項結果彌補了這些缺陷。

例六：小波理論。事實上，**Fourier** 在 **1807** 年提出：任何週期為 **2** π 的函數都可用 **sin(nt), cos(nt)** 表示。但在 **1873** 年， **Paul Du Bois-Reymond** 提出反例，由此產生幾個新的問題：

1. 哪些函數符合上述無窮級數（**Fourier** 級數）收斂？
2. 新的求和法（**Cesaro mean**)、收斂方式。
3. 在函數空間（無窮維向量空間）中是否可找到其他正交基底來代替 **sin(nt), cos(nt)**。(在高中階段學到的是有限維向量空間，其基底的元素個數為有限個。）[2]

上述第三個問題經一百多年的發展，在 **1985** 年，**Y. Meyer** 與 **S. Mallat** 提出 **multiresolution analysis**，其概念是，例如：當要量較短的距離時，會用較小的測量單位（例如：公分、奈米等)，而當要量較長的距離時，則會用較大的測量單位（例如：公里、光年等)，即根據所欲觀測對象的大小，選擇不同的測量尺度（**scale**)。在 **1987** 年，**I. Daubechies** 根據此一結果找到 **compact supported wavelet**（在某一範圍內的函數值不為零，其他位置都為零的函數)。從此，小波理論就被廣泛的應用到各個不同的領域上。像 **JPEG2000** 的壓縮技術、美國 **FBI** 的指紋辨識等。

小波基底是由一個母函數 ψ 經伸縮與平移得到的

$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$$

當然，ψ 需滿足某些條件。則對於滿足某些條件的函數 f **:**

[1] 參考 **http://users.rowan.edu/~polikar/WAVELETS/WTpart1.html**。
[2] 請參閱：**S. Jaffard, Y. Meyer, R.D. Ryan: Wavelets, Tools for Science & Technology, *SIAM*, 2001.**

$$f(x)=\sum_{-\infty}^{\infty}\sum_{-\infty}^{\infty}\alpha(j,k)\psi_{jk}(x)$$

其中 $\alpha(j,k)=<f,\psi_{j,k}>=2^{j/2}\int f(x)\psi(2^{j}x-k)dx$ 。

例七：生態問題。在 **1926** 年，一位義大利生物學家 **Humberto D'Ancona** 發現，**Fiume** 及 **Trieste** 兩個港口的魚貨，在一次大戰期間（**1914** 年 **7** 月 **28** 日～**1918** 年 **11** 月 **11** 日）及剛結束時，大魚 **(predator)** 所占的比例較高。(如下表)

TABLE 2.6.1 Percentages of Predators in the Total Catch (Predators + Prey)

Port	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
Fiume	12%	21%	22%	21%	36%	27%	16%	16%	15%	11%
Trieste	14%	7%	16%	15%	—	18%	15%	13%	11%	10%

他請教他的岳父 **Vito Volterra**（義大利著名的數學家）是否有數學模型可解釋上述現象。後來，**Volterra** 建立了一個微分方程組模型，稱為 **predator-prey** 模型或 **Lotka-Volterra** 模型：

$$\begin{cases} x' = -ax + bxy \\ y' = cy - kxy \end{cases}$$

其中 **x(t)**大魚數量，**y(t)**小魚數量，**a, b, c, k** 為大於零的常數，並根據此一模型解釋了上述現象。**(**取自 **R. L. Borreelli & C. S. Coleman: D*ifferential Equations*, 2nd ed., John Wiley & Sons Inc, 2004)**

例八：策略（戰略）理論

$$S_t = f(t,S,S_0,u)$$

其中 $S(t)$ 描述一個國家或一家公司的狀態（隨著時間改變），S_0 為現狀，u 表示所採取的策略。此方程式（組）為最佳控制理論 **(optimal control theory)** 討論的對象。

以上這些例子，顯示了跨領域學習的重要性與數學在各個領域所扮演的角色，而當我們要描述各變量間的動態變化關係，則需要極限與微積分，這也許部分回答了為何要學習微積分。期望各位數學老師們能找出更多適合於中小學的例子，讓學生們更能感受到學習數學的好處與重要。