

如何愛上數學？評《愛上數學的 14 堂課》

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

書名：愛上數學的 14 堂課

作者：新井紀子

譯者：許慧貞

出版社：世茂出版社

出版資料：210 頁，平裝，定價 260 元

出版年：2010

ISBN: 978-986-6363-46-7

關鍵詞：日本科普、數學教育改革、圓周率



一、前言

對於本書作者新井紀子 (Arai Noriko)，我們當然不陌生，她在《吐嘈學數學：16 堂課讓你擁有數學腦！》(中譯本：如果出版社，台北，2009) 中現身說法，為我們提供一位從法律人改行成為數學家的數學學習觀點與進路，非常值得我們參考與借鑑。

或許出身法律人背景吧，新井紀子十分重視數學知識的結構(在本書中，她稱之為構造)：「所謂的『構造』就是，依循某種不知名法則而運作的一切事物所共通的『某樣東西』，其中形式最簡單的，就屬數學的構造了。在英語的過去式構造中還有不規則動詞，但數學卻沒有任何不規則的情況。也就是說，透過算數

跟數學，大家應該都能學習到名為『構造』的東西。」

在這個脈絡中，新井紀子邀請讀者一起來解 2003 年東京大學的入學考試題目：「請證明圓周率大於 3.05」，實在很有意義。我們相信解決這個問題固然有很多絕招（譬如出自補習班名師），不過，從數學結構切入，不是更能滿足知識獵奇 (intellectual curiosity) 的心情嗎？

二、內容簡介

顧名思義，本書共有十四堂課，目錄依序如下：

- 第一堂課 如何解應用題？
- 第二堂課 一起做習題吧！
- 第三堂課 練習轉換單位
- 第四堂課 「1」不一定永遠是 1
- 第五堂課 算數規則書
- 第六堂課 分數究竟是什麼？
- 第七堂課 分數的除法
- 第八堂課 公平地比較
- 第九堂課 除法、分數、率、比其實一樣
- 第十堂課 校外教學！將數字化為圖形
- 第十一堂課 將應用題的敘述列成算式
- 第十二堂課 學會如何解延伸問題
- 第十三堂課 配合答案的解題法
- 第十四堂課 讓大家快樂學習的數學

此外，還有〈課前說明：先了解「構造」，讓心情愉悅！〉，書末所附錄的〈習題解答〉與〈補充說明〉。

第一至四堂課主要藉由應用問題，說明除法所涉及的一些算數構造。作者從確實的理解問題開始，為此，它在第二堂課一起做習題的問題，即是第一堂課所最後所布置的題目。然後，在第三堂課，她則是以練習單位換算為例，進而在第四堂課，應用極淺顯易解的例證，說明「1」不一定永遠是 1。相信這些對於小學（數學）教師來說，一定頗能感同身受。

在第五堂課中，作者詳盡地解釋了「無論如何都必要的規則和為了方便起見的規則」，都是有關算術運算與以及除掉括號的一些規約 (convention)。顯然，這些都需要適當的練習量，才能掌握得好。

第六、七堂課依序講解「分數究竟是什麼」和「分數除法」。在第六堂課中，作者當然還交代了分數的乘法與約分運算。至於這些算法之核證，則應用到第五堂課中的括號規約，譬如：爲了檢視

$$\frac{11}{9} \times \frac{18}{121} = \frac{11 \times 18}{9 \times 121}$$

作者使用了其中規則 9： $(11 \div 9) \times (18 \div 121) = 11 \div 9 \times 18 \div 121 = 11 \times 18 \div 9 \div 121$ ；以及規則 8： $(11 \times 18) \div (9 \times 121) = 11 \times 18 \div 9 \div 121$ 。另一方面，作者也利用乘法反元素的概念，來說明何以「分數相除時，可先將除號後面的分數上下顛倒，然後再相乘」。

第八堂課是本書最精彩的一堂，主要討論圍繞在東京大學 2002 年入學考試題目「請證明圓周率大於 3.05」上。爲此，她先說明「(比)率」的概念，以處理總數不同卻硬要比較時，如何得到公平的結果。緊接著，她再提及一個圓周率計算的紀錄保持人：東京大學的金田康正，2005 年記錄爲小數點以下 1 兆 2400 億位。最後，她依序說明何以「圓周率 > 2 」、「圓周率 < 4 」、「圓周率 > 3 」，從而解決了這一個入學試題。針對這個問題，作者還特別提及：如果讀者「也能不感到畏懼，堂堂地寫下第一行」如：

畫一個半徑為 1 的圓，並在圓內畫一個內接正八角形。這時圓周的長為 2π (π 就是圓周率)。接著求出正八角形的周長，然後證明它比 $2 \times 3.05 = 6.1$ 還大即可。

即使這只是些許篇幅，「如果我是閱卷老師，大概會給 30% 左右的分數」。其實，正如作者還指出：「這個問題大概有七成，不，八成運用到國中所學的數學，就能解出來了」。

第九堂課重點是利用比例式 (proportion) 的概念及性質，將除法、分數與比率 (ratio) 等連結起來。這個單元乃是國中數學銜接國小算術的最重要主題，其中，作者還提及相似形與類比 (analogy) 關係，令人耳目一新。緊接著，以本堂課爲基礎，作者在第十堂課中，利用「相同形狀」畫出 $5/11$ ，說明數目的幾何表徵 (representation) 之意義。這個練習，其實也可以爲國高中的座標幾何之學習鋪路。

這種有關數學問題的翻譯，在第十一堂課的「將應用題的敘述列成算式」主題中，則主要指向一次方程式的建立。作者在尙未引進未知數符號 x 與 y 之前，即強調天平之使用，指出解方程式之關鍵，乃在於對於「等號 =」之充分理解，爲此，作者特別提醒讀者：

為了順利解開方程式，通常會一邊檢視「=」這個天平的兩邊是否相等，一邊前進。這時，如果將「=」這個符號翻譯成「變成……」或「當成……」，會造成以下的大錯：

$$x+y=11000,$$

$$y=x+3000,$$

$$x+(x+3000)=11000=11000-3000=8000=8000\div 2=4000。$$

我幫大學入學考試批改試卷時，經常看到這樣的答案。雖然答案正確，但這個答案絕對、絕對、絕對是 0 分！簡直還想給他負分了。

其實，作者在此針對算術等號與代數等號的大不同，提出了一個極具體的警惕，不曉得讀者能領會否？

在第十二堂課中，作者以解速度問題、水流問題，以及百分比問題等為例，說明如何「觸類旁通」，「學會如何延伸問題」的重要性。她所提議的策略依序是從「理所當然的事」開始思考，試者找出「關係」，以及「依序且毫無遺漏地改變式子」。最後這一點，主要針對方程式中的式子及符號之操作，對於代數初學者有一定的難度，讀者宜務必多加省思才是。

第十三堂課的主題是試卷的深入檢討，作者稱之為「配合答案的解題法」。在本堂課中，作者根據所舉的例題，提出「思考構造，培養能理解的體質」之七項重點，以便獲得快樂學習的能力，不過，作者還是強調「不斷出錯也沒有關係！」

最後，作者在第十四堂課中，詳細地說明如何解決一個翻譯成數值算式的「隱算法」難題，並藉以呼籲這種求解的能耐，可能是成為未來科技公民的基本素養：

假設你打算從事能左右人們生活或幸福職業（雖然世上應該都是這樣的職業），無論情況多麼麻煩，你都必須合理地思考，鍥而不捨地調查。那是從事該職業的人必須承擔的責任。從檢察官和法官，到負責開發重要控制程式的程式設計者，或大樓、橋墩的設計者等，都必須具備這種能力。只有憧憬跟熱情，是無法勝任這些工作的。（頁 187-188）

三、評論

請先容許我引述我對本書作者的《吐嘈學數學》之部分評論：「本書是極適合國、高中學生當成具有挑戰性的一本普及讀物。當然，本書『以問題引導討論』的敘述，相當不同於教科書與參考書的進路，因此，不能視之為一般的解題書籍。不過，對於中學生或一般讀者而言，閱讀本書的心理準備，大概喜歡思考就可以了，而這當然需要一點點數學的成熟度 (maturity)，能夠進行起碼的反思，儘管

正如同本書作者一樣，數學可能曾經是最害怕的學科之一。」¹誠然，本書也是採用問答對話形式，以及「以問題引導討論」的進路，所不同的，乃是本書題材限制在國小中、高年級及國一的算術層次。

不過，正如《吐嘈學數學》，知識結構之關懷也是本書之特色。這種初等數學的知識結構，對於已經受過高等數學洗禮的國中小教師來說，應該不難掌握。由於它對數學的教與學所帶來的深刻啟發，我們高度推薦國小教師將本書列為科普參考或必讀書目。甚至於補教界（含才藝教室）的數學教師，也可以從中獲益才是。

就本書的取材與書寫來看，作者顯然應用了相當多她曾經非常痛苦經歷過的小學算術應用題，如流水問題、速度問題等等。現在，由於她已經被訓練成為專業數學家了，因此，這些題材倒變成了順手拈來的敘事材料。不過，其中關鍵不在於她只是懂得更多的數學，而是她掌握了更高層次的數學知識結構，於是，初等數學的理論脈絡，對她而言，當然就變得清澈見底了。也正因為如此，作者的書寫功力也見諸於她的取材。譬如說吧，那一個東京大學的入學試題，就是一個神來之筆，作者將這一問題的求解，適當地放在初等數學脈絡之中，也見證了她的慧眼與用心，非常值得我們高度肯定。

而所有這些，顯然都出自她的（數學）教育改革關懷。根據作者自述，她年輕時非常害怕數學，這或許是她不言宣地支持教改的主要原因吧。現在，她已經抵達「見山又是山」的境界，終於可以鼓勵讀者「不斷出錯也沒有關係」！因此，從教改論述面向來看，我誠懇地呼籲中、小學數學教師甚至數學教育專家，都能找時間好好地上新井紀子的這十四堂課，看看這位原先恐懼數學的法律人，最終是如何愛上數學的。還有，對於孩子的數學學習感到焦慮的家長，也可以運用「書報討論」（或讀書小組）的方式，好好地分享本書作者的數學經驗 — 不要忘了她曾經非常恐懼數學，進而與孩子一起溫習初等數學。相信如此一來，孩子的數學學習態度與方法，一定可以獲得改善才是。

本書有一中譯值得提醒讀者注意：頁 93 “algorithm” 中譯成「指令」相當怪異，應譯為「算則」（或計算方法）為妥。

優秀數學科普作品的指標

評價方式：指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

1.知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)

¹ 參考洪萬生，〈吐嘈學數學：勇敢面對教改的數學普及作品〉，台灣數學博物館·科普特區·深度書評欄。

- (1) 認識論面向 ☆☆☆☆
 - (2) 方法論面向：☆☆☆☆
 - (3) 歷史或演化面向：☆☆
 - (4) 哲學面向：☆
 - (5) 教育改革面向：☆☆☆
 - (6) 與自然科學、人文社會乃至生活經驗的連結：☆☆☆☆
- 2.形式或表達 (Form or representation)
- (1) 創新手法：☆☆☆☆
 - (2) 數學知識的洞察力：☆☆☆☆
 - (3) 歷史事實的洞察力：☆☆
 - (4) 異文化的啟蒙意義：☆
 - (5) 忠實可靠的參考文獻：不適用
 - (6) 敘事的趣味性、可及性與一貫性：☆☆☆☆
 - (7) 中譯本的品質 (若需要)：☆☆☆☆
3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form)
- (1) 青少年層次：☆☆☆☆
 - (2) 一般社會大眾：☆☆☆☆
4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage)：

國〔高？〕中的入學考試，雖然也會出一些「只要補習3年學會超級技巧，就能解開的問題」，但知名大學的入學考試卻不是這麼回事。

大學入學考試的問題中，最難的就像第八堂課出現的那種圓周率問題，學生們必須合乎邏輯且簡潔有力地說明「這個（圖表、圓周率、微分、積分、三角函數）究竟是什麼？」這類問題，以及剛剛測試你是否自由運用所有的所學概念的問題。（頁131）

確實會有人能做出剛剛那種完美且有水準的回答，但「數學能不能進步跟有沒有數學判斷力有很大的關聯」這種想法，卻完全是種迷思。數學能不能進步，跟有沒有忽略或省略理所當然的事、有沒有練習依序列出式子有關。只要不斷重複這些事，就能寫出簡單卻具有說服力的「高水準答案」。

此外，這點不僅限於數學。寫出出色的判決書、做出美味的年節料理、成為像鈴木一郎那樣的選手、建造法龍寺的五重塔，創造出電影〈龍貓〉等，都是基於「幾乎所有的事都是有意義的」這個共通的基本特質。（頁161）

數學是由「理所當然」的事所組成，並經由式子跟證明書寫出來，所以錯的就是錯的，對的就是對的，結果一清二楚，沒有模糊地帶。

因此，你可能會在短時間之內，不斷體會犯錯的經驗。

或許你會覺得，「犯錯真是討厭，一被打 \times 就覺得好難過。」老實說，我也很討厭 \times 。

不過，這時候其實比較重要的。雖然討厭被打 \times ，但能在不帶給他人困擾的情況下體會被打 \times 的經驗，便是數學這門科目的優點。如果被看到被打 \times 的答案就想，「這種東西丟掉算了。」氣得想把考卷丟到垃圾桶的話，那麼 \times 就只是一個記號而已，你也只會得到 \times 所帶來的傷害。不過，要是能像這次一樣學到教訓，得到一個 \times 便是讓你理解「若不能依序好好整理，就會搞不清楚意思」，「要是不確實寫出原因，別人會看不懂」，『明明不了解結構卻故意裝懂，只會越學越痛苦』這些事的最佳訓練。

.....

所以說，最好趁早多體驗 \times 。(頁 173-174)