

如何接近超簡單數學？

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

書名：數學，一看就懂

作者：根上生也

譯者：謝仲其

出版社：世茂出版社

出版資料：206 頁，平裝，定價 280 元

出版年：2010

ISBN: 978-986-6363-51-1

關鍵詞：日本科普、生活中的是學、正多面體、漂亮證明



一、前言

本書是根據作者在電視節目上扮演「數學偵探生也」的角色時，他自己所編寫的劇本改編而成。由於每一單元的時間都只有 2 分 30 秒，因此，作者在那麼短的時間內，「必須設定一個趣味的情境，在其中找出數學的問題，然後將它解決。」限於電視節目的特性，他「不能寫出複雜的算式，必須編出所有人都能一看就懂的解法。」而這，也是他一貫所提倡的，希望大家能重新以「一看就懂」的觀念來看待數學。

於是，在本書中，作者「想做的就是不要使用算式，而用繪圖、簡單的計算，

確實地用講述的方式來讓人明瞭。我希望讓大家能知道，的確有一種可以用這種方式來理解，這種數學能讓以往看到數學就卻步的人也能快樂學習。」事實上，在幾何方面，本書進路近於「圖說一體，不證自明」的 *proof without words*。對於擴充我們更多面向的數學認知來說，本書的確是蠻有啟發性的普及作品。

二、內容簡介

本書共有六章，其主題依序如下：

- 第 1 章 各種求和公式
- 第 2 章 數數的技巧
- 第 3 章 數子的魔術
- 第 4 章 神奇的立體圖形
- 第 5 章 漂亮的證明
- 第 6 章 隱藏在生活中的數學

第 1 章所包括的單元有「將連續的 10 個數加起來」、「從 1 加到 1000」、「金字塔的體積」、「平方數求和公式」、「立方數求和公式」以及「2 乘冪的總和」。作者主要利用圖解與圖形（平面或立體）來說明其解法。這些說明的重點，都強調其核證過程與公式發現之關聯，以及多元的解釋觀點，譬如說吧，在 2 乘冪的總和中，作者就介紹了「用公式解釋」、「用二進位解釋」、「用面積來解釋」等三種進路，非常令人印象深刻。

第 2 章介紹數數的技巧，主要應用組合數概念，再配合一些巧思。第 3 章主題是「數字的魔術」，是相當吸引人的單元題材，值得多加注意。誠如作者自述：「本章集結了各種魔法般的神奇現象，但它們絕對不是魔術，只是一些隱藏著高深數學的現象而已。只要你知道這些招式的奧秘，一定會發現當中的數學原理比表面的現象更加有趣。」事實上，本章的第 1 題「扳手指計算」，就是根據下列恆等式而得： $(x-a)(x-b) = x^2 - (a+b)x + ab = (x-(a+b))x + ab$ 。針對本章第 8 題「0.99999... 的謎」之答案等於 1，作者提供了三個說服的方法：(1) 從已知的事實來推論，利用 $\frac{1}{3} \times 3 = 0.33333... \times 3$ 推得 $1 = 0.99999...$ ；(2) 用方程式來解釋，譬如令 $x = 0.99999...$ ，則 $10x = 9.99999...$ ，於是， $10x = 9 + 0.99999... = 9 + x$ ，從而推得 $10x = 9 + x$ ，解 x 即得；(3) 歸謬法，若 $1 - 0.99999...$ 不為 0，那麼，它的差將會無限地小，因而導出矛盾。¹

在第 4 章主題是訓練三維的直覺，其中，第 1 題的答案，就與我們直覺背叛，真是下足了馬威，這一題是問讀者：在正四面體、正六面體（亦即正立方體）、

¹ 嚴格來說，這三個說服都需要實數完備性及無窮級數相關運算，才能說得圓滿，

正八面體、正十二面體和正二十面體中，哪一個體積最大？而答案並非一般人所認為的正二十面體，而是正十二面體。不過，作者告訴我們：只要實際做出模型馬上就可以一目了然。此外，本章第 2 題是「分割正四面體」、第 3 題是「立方體與正八面體的展開圖」、第 4 題「躲在正十二面體中的立方體」，以及第 5 題「西瓜罐頭」（比較球的表面積與其外切圓柱面的側面積之大小）。

第 5 章的主題是「漂亮的證明」，作者一開始就指出：

數學中最重要的就是「證明」了。證明就是將理論性的推測，歸納出結論來。但是如果證明只是列出一堆複雜的符號，那也很無趣。你想不想看看，那種能夠直接看出問題的本質，乾淨俐落的漂亮證明嗎？你不需要自己靈光乍現突然想出來，只要看了本章所寫的證明會有所感動就好。因此，本章不叫「靈光乍現的證明」而叫「漂亮的證明」。

因此，本章所提供的漂亮證明，都可以直接看出問題本質，譬如，第 1 題的「一看就懂的畢氏定理證明」與第 2 題「平方和的最大值」，都是可以直接訴求圖形的「不證自明」。至於其他證明例子，則大都與離散數學 (discrete mathematics) 息息相關。而這通常是一般大學應用數學系與台師大數學系的必修科目之一，對於後者而言，我們認為此一訓練對於有意從事教職的大學生來說，至關緊要，因為這一類的數學問題實在太多了。

本書前面五章主要強調數學的「有趣面向」，第 6 章（也是最後一章）則專門針說明數學知識的「有用面向」，至於其進路則是指出數學如何遍存於日常生活之中。因此，本章 10 個問題都取自吾人日常生活經驗，譬如牛奶盒的容積與實際計算的誤差問題（第 1 題）、影印紙 A4、A3、B4 和 B5 的邊長比之關係（第 2 題）、名片中暗藏的黃金比例（第 3 題）、信用卡的會員號碼（第 8 題）、人行道地磚（第 9 題）等等，這是學習數學的最佳引起動機素材，值得數學教師好好模仿並進一步改進研發。

三、評論

本書不是一般的數學益智書籍，因為它所提供的問題之解決，都需要適當的數學知識背景，無法憑藉天生的本事而得以解出。因此，它可以歸類為趣味數學類的普及作品。

不過，由於作者根上生也是一位頗有代表性的數學家（日本拓樸學式圖論 (topological graph theory) 的代表數學家），又任教於橫濱國立大學教育人類科學部，因此，本書在趣味的包裝下，企圖融入頗為深刻的數學知識，自然是不在話下。

本書的所有問題都非常有趣且重要。不過，其中，我要特別推薦第 4 章那些神奇的立體形狀，以「鍛鍊三維感覺的問題」。有關空間視覺能力的培養，在數學學習中，它與符號法則的運算與操作能力一樣重要，而且，經由適當的學習，此一能力通常可以大大提升，因此，如果教師與家長願意將本書推薦給中、小學學生閱讀，則不妨積極介入，將自己的學習經驗與他們分享（一起研讀最好），鼓勵他們通過模型或電腦繪圖軟體的輔助，及早強化他們的學習，顯然相當重要。另一方面，本書最後一章的「生活中隱藏的數學」，也是非常難得一見的題材，如果教師在課堂上能夠善加運用，那麼，或許將不再有學生因為數學的「無用」而放棄學習。從數學普及作品中取材，本書也為數學普及之有益於數學教學，提供了另一個重要的範例，值得我們取法。

優秀數學科普作品的指標

評價方式：指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

1. 知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)

- (1) 認識論面向 ☆☆☆☆
- (2) 方法論面向：☆☆☆☆
- (3) 歷史或演化面向：不適用
- (4) 哲學面向：不適用
- (5) 教育改革面向：☆☆☆
- (6) 與自然科學、人文社會乃至生活經驗的連結：☆☆☆☆

2. 形式或表達 (Form or representation)

- (1) 創新手法：☆☆☆☆
- (2) 數學知識的洞察力：☆☆☆☆
- (3) 歷史事實的洞察力：不適用
- (4) 異文化的啟蒙意義：不適用
- (5) 忠實可靠的參考文獻：不適用
- (6) 敘事的趣味性、可及性與一貫性：☆☆☆☆
- (7) 中譯本的品質（若需要）：☆☆☆☆

3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form)

- (1) 青少年層次：☆☆☆☆
- (2) 一般社會大眾：☆☆☆☆

4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage)：

(從略)