

爺爺的證明題：一本有關數學與宗教的數學小說

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

書名：爺爺的證明題：上帝存在嗎？(A Certain Ambiguity: A Mathematical Novel)

作者：高瑞夫 (Gaurav Suri)、哈托許 (Hartosh Sinnngh Bal)

譯者：洪萬生、洪贊天、林倉億

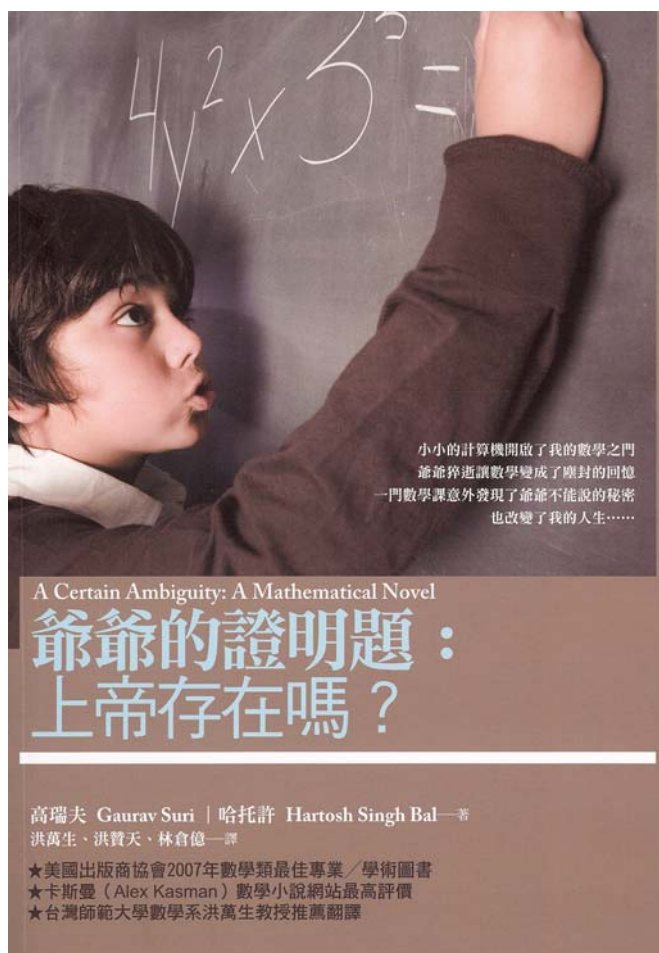
出版社：博雅書屋

出版資料：311 頁，平裝

出版年：2009

ISBN: 978-986-6614-40-8

關鍵詞：數學小說、確定性、第五設準、非歐幾何、集合論、連續統假設、策梅洛公理系統、數學與宗教



一、前言

本書英文原名 *A Certain Ambiguity: A Mathematical Novel*。所謂的 *certain* 也好，*ambiguity* 也好，都指向了數學知識的確定性議題，對於數學哲學基本問題有興趣的讀者，想必不會輕易放過才是。¹

不過，本書作者的「夫子之道」則比較「溫柔」：

我們寫這一本小說的主要目的，是想向讀者證明數學是美麗的。而且，我們也努力證明數學的深刻性對於人類真正在乎的事情之意義。我們相信通過小說的媒介，這兩個目標最容易達成。畢竟，感受到事物美的是我們人類，同時，也正因為我們是人類，才感受得到相關哲學問題的即時性。而要吸引人類進入這一圖像（世界）的不二法門，則莫過於說一個故事。

所謂的「數學美」當然與「數學真」有關，不過，兩位作者顯然在自序中迴避此一問題。他們利用敘事來連結數學美，顯然是一個比較討喜的進路，這當然也可能出自出版商的建議吧。事實上，根據 Alex Kasman 的數學小說網站的說明，本書的「範疇」(category) 如下：本書文類 (genre) 為歷史小說、教學法 (didactic)，小說要素 (motif) 包括學院、證明定理、真實數學家 (real mathematicians)、女數學家、數學美、有趣與有用、羅曼史、數學教育，以及宗教。針對數學小說評價，Kasman 也提供了數學內容 (mathematical content) 與文學品質 (literature quality) 兩項指標。本書屬於高度推薦 (highly rated) 中的一本。

二、內容簡介

本書共有 8 章。一開始，敘事第一人稱拉維回憶爺爺（應該是外公）送他的十二歲生日禮物——一台掌上型計算機，以及如何引導他進行驚奇連連的數學解題。沒想到爺爺在隔天睡夢中安祥去世，遺囑中留下一筆錢，贊助他前往美國就讀大學——當然希望他主修數學。後來，拉維前往史丹福大學就讀，因此，美國加州就成了現代的故事場景。拉維大四即將畢業，但是，還在掙扎是否以經濟學為主修。有一次在欣賞爵士樂（爺爺是個爵士樂迷，他從小備受薰陶）時，他遇見了也是樂迷的數學家尼可教授，由於宿舍室友彼得的引薦認識，拉維決定選修尼可的一門數學通識課程——「思考無限」。於是，現代的師生之數學對話，遂引出了維傑 1919 年居停美國的短暫遊學生涯。原來，尼可曾研讀維傑有關代數數論 (algebraic number theory) 研究的一篇論文，不過，所出版期刊之編輯特別註記該文之構想，乃是出自維傑在紐澤西牢獄中坐監時的研究心得。這一條軸線的故事場景，安排在美國東岸的紐澤西一個虛構的摩里賽城。

¹ 對於數學哲學入門有興趣的讀者，不妨參考洪萬生，〈數學哲學入門三書〉，台灣數學博物館科普特區『深度書評』，其中所推薦的第一本，就是本書。

爲什麼爺爺會在美國坐監呢？原來他在摩里塞小鎮廣場發表「褻瀆上帝」言論而被逮捕。於是，對於維傑基於數學論證而質疑有關上帝的存在，從而引發宗教信仰之爭議，作者也通過一位保守、虔誠但人格高尚的法官泰勒之角色安排，進行數學與宗教的真誠對話，從而觸及了知識 (knowledge) vs. 信仰 (belief) 的認識論核心問題，譬如我所「相信」的一定是「真理」或「知識」？維傑與泰勒這兩位分別是數學與宗教的「死硬派」之最終和解，竟然是愛丁頓爵士的核證愛因斯坦之廣義相對論，從而證明歐氏幾何不再是有關我們空間的真實幾何學 (true geometry)。因此，彼此的讓步，促成了一段令人心折的跨文化忘年之交。泰勒法官顯然因爲建議紐澤西州長釋放維傑，而喪失了被提名爲大法官的機會，不過，他心胸坦蕩，求仁得仁。他們的故事結局在泰勒千里迢迢造訪孟買的維傑，在溫馨的友誼中落幕。

顯然爲了平行呼應 (parallelism)，在現代這一條敘事軸線中，作者利用尼可的「思考無限」這一門課程，一方面跨越異時空，藉著與維傑或法官對話，說明歐幾里得《幾何原本》既古典又現代的知識價值，另一方面，則以康托爾的集合論爲例，更進一步強調了邏輯 (logic) vs. 意義 (meaning) 的重要性。這一部分更是直指數學哲學的核心，值得吾人深入理解。

現在，我們可以更細緻介紹本小說的內容，尤其是數學知識部分。

第 1 章一開始數學就大辣辣地走了進來！爺爺要拉維利用掌上型計算機玩的趣味數學問題。在尼可的課堂上，則依序是無限，集合，集合的秩，吉諾悖論，證明的意義，無窮級數的（算術）運算，以及無限集合之一一對應（兩個同心圓、自然數及其平方數、兩條線段）等概念。其中克蕾兒計算吉諾悖論 (Zeno paradox) 相關無窮級數：總和 = $2+1+(1/2)+(1/4)+(1/8)+(1/16)+\dots$ ，將兩邊乘上 $(1/2)$ （右式逐項乘上 $1/2$ ），而得到一個新的級數，再從原來的級數減去這個新的級數，最後得知：總和 = 4。尼可極爲讚賞克蕾兒的論證「幾乎是對的」，再細看極限與無限和之後，可以「讓它無懈可擊」當然，本章比較「軟性的」情節，則是拉維在這個課堂上認識克蕾兒。拉維就是透過她的母親卡蘿 — 史丹佛大學圖書館員 — 的幫忙，而得以逐步地揭開爺爺被囚的故事。

在第 2 章中，拉維開始「打聽」爺爺的坐牢故事，他是經由摩里塞小鎮報紙的報導，才得知爺爺因瀆神而坐牢！此外，本章也安排彼得爲慶祝找到摩根史丹利的工作機會，而在豪宅家中舉辦慶祝宴會，那些選修「思考無限」課程的同學都被邀請參加，於是，他們便在此討論數學知識的確定性，譬如「質數是無窮多」之證明。此外，尼可在他的課堂討論無窮級數之求和問題，其中他又再次強調克蕾兒所運用的那個「美麗但錯誤的論證」，是求並且，他指出拉維證明調和級數 $1+(1/2)+(1/3)+\dots+(1/n)+\dots$ 發散的方法，巧合地等同於十四世紀的奧雷姆

(Oresme) — 作者根據奧雷姆的進路，虛構了一篇奧雷姆的日記，這一手法在本書中一再重現，至於作者的言之成理，則可參閱書末的〈註解&參考書目〉。尼可在給拉維的電子郵件中指出這一點，還有，他還提到著名的平方數倒數之無窮級數和：

$$1 + (1/4) + (1/9) + (1/16) + (1/25) + \dots = \pi^2 / 6$$

這是歐拉 (Euler) 最早發現的公式，他運用類比的方法在邏輯推論上根本站不住腳，但是，弔詭地，卻能得到如此漂亮的公式。無怪乎在這一封信的最後，尼可忍不住讚嘆再三：

一個和圓周有關的比值，怎麼會和平方和的倒數扯上關係呢？這不是很神奇嗎？

有時候，當我用全新的角度再看一次這個等式的時候，又會再度感到訝異與敬畏。就是這種算式讓我愛上數學的。這裡有太多意想不到的連結，太多想不到的秩序，是一面幾乎隱藏的織錦，只有經過最聰明的頭腦的努力之後，我們才能瞥見少許。是誰製造這些連結的呢？它們為何存在？我只能說，上帝一定是個數學家。

事實上，如何將（克蕾兒）美麗但錯誤的論證稍事修訂，而成為具有「發現」功能的證明方法？尼可在第 2 章結束時，提及這個例子，顯然是為此留下伏筆！另一個伏筆，也見諸於尼可在課堂上所學的歷史上著名的科學 vs. 宗教之爭議。

第 3 章一開始是一封摩里塞居民的投書結尾之轉述，要求嚴懲這一為印度撒旦。顯然，由於《紐約時報》針對此一事件的捍衛言論自由之評論，觸怒了這一小鎮的虔誠教徒，看來，這一場宗教信仰 vs. 言論自由之風暴已經無可避免了。於是，紐澤西州長只好指派泰勒法官出馬審理此案，看看是否需要起訴數學家維傑。

通過卡蘿的資訊，拉維在法學院圖書館讀到爺爺與法官的對話，其中爺爺提及數學的嚴密性有別於宗教，因為上帝之存在無法嚴密證明。於是，拉維以畢氏定理為例，說明數學確定性 (certainty) 與證明 (proof) 之關係。由於維傑是印度人，所以，作者提供了印度十二世紀婆什迦羅 (Bhaskara II) 的弦圖證法，以及虛構的婆什迦羅的一則日記，其中說明他為了排解女兒莉拉沃蒂的喪夫之痛，而撰寫數學經典《莉拉沃蒂》(Lilavati) 的經過。顯然為了呼應數學家的受難，尼可的課堂上開始討論不可公度量 (incommensurable)，以及畢氏學派的貢獻與其「萬物皆數」哲學主張之侷限。為此，作者還虛構的畢達哥拉斯給他的老師的一封信，其中詳述了畢氏哲學、正方形對角線與其邊的不可公度量，以及洩漏此

一發現的門徒海巴瑟斯 (Hippasus) 的海上溺死蒙難。

第 4 章一開始，拉維請求主修哲學的亞丁（與拉維同時選修尼可的「思考無限」課程）一起閱讀爺爺的法院文字記錄。這是因為正如同爺爺一樣，亞丁也不斷地與「如何確定什麼是真實的」問題纏鬥。而所有這些，當然都與發明集合論的康托爾 (Cantor) 有關。於是，作者緊接著虛構康托爾的一篇日記，其中介紹了他的有理數是可數的 (countable) 證明之原始版本。尼可在他的課堂上，則指出康托爾征服無限所付出的代價，以及他如何運用歸謬法與對角線數字論證，證明實數是不可數的 (uncountable)，在此教學過程中，師生的對話頗有現場感，值得我們注意。至於維傑與泰勒法官的第二次對話，則主要針對半圓之圓周角等於直角之證明，進行幾何學基礎之討論，其中主要涉及公理的必要與意義。本章最後，拉維邀請克蕾兒和亞丁一起向尼可請教公理之有關議題。公理是什麼？不矛盾？不證自明？「我想事情沒有這麼簡單」，這是尼可暫時的評論！

第 5 章一開始，便是作者虛構的一篇歐幾里得日記，其中說明公理系統中的設準之條件及必要性。緊接著，維傑與泰勒法官的繼續話題，當然是歐幾里得的《幾何原本》了。為此，作者再度讓維傑提及婆什伽羅有關畢氏定理之「視覺證明」，並據以指出：「重讀《幾何原本》讓我確信光看圖形是永遠不夠的。圖形本身只能幫助我們了解，而不能引致證明或真理。只有演繹和理性才能引致真理。」如此一來，作者順勢介紹《幾何原本》的第一冊之 23 個定義，5 個設準 (postulate) 和 5 個共有概念 (common notion 或公理)，以及如何運用這些，去證明第一冊的前幾個命題 (proposition 含作圖題與證明題)。維傑顯然企圖利用這些例證，強調「所有值得相信和依賴的知識，都必須建立在理性之上。」而這，當然有別於宗教信仰，因為「人們被情感或文化的需要所驅策而接受宗教」。

第 5 章的其他內容包括史賓諾莎 (Spinoza) 與希爾伯特 (Hilbert) 各一篇虛構的日記，分別從哲學與數學基礎兩個方面，來討論確定性議題。還有，尼可師生有關確定性，以及尼可班上有關康托爾連續統 (continuum)、(超越) 基數等概念之討論。這個部分歸結於作者所虛構的康托爾三封致米塔格 -- 列夫勒 (Mittag-Leffler) 的信。至於本章最後，則是拉維從法庭文件得知泰勒法官決定將維傑交付審判。在一封寫給拉維的信中，法官以哲學家笛卡兒為例，指出維傑有關信仰的盲點。

第 6 章的主要內容是維傑與泰勒有關非歐幾何的討論，其中作者以他自己所虛構的歐幾里得之一篇日記作為引子，旨在說明歐氏曾試圖利用前四個設準，來證明第五設準。接著，作者當然會將薩切瑞 (Saccheri)、波利耶 (Bolyai) 以及羅巴秋夫斯基 (Lobachevsky) 請出場，至於現身的方式，則是提供他們的筆記或書信。此外，作者也引入模型 (model) 的概念，說明歐氏與非歐幾何的相容

(consistency) 問題。最後，尼可將策梅洛 (Zermelo) 類比為二十世紀的歐幾里得，開始為第 7 章的數學總結暖身。

在第 7 章一開始，尼可師生在前往尼可家的途中，談起《紅髮聯盟》中福爾摩斯之邏輯推論之無懈可擊。以此為引子，作者有意類比福爾摩斯與歐幾里得的邏輯推論。緊接著，作者也讓尼可進一步類比歐氏幾何 vs. 策梅洛集合論，指出：歐氏幾何的第五設準與前四個設準互相獨立 vs. 連續統假設與基本集合論之公設互相獨立。不過，如此一來，所謂的空間之真實幾何學 (true geometry) 為何，就成為一個「大哉問」了。為此，尼可鼓勵大夥閱讀高斯、黎曼和愛因斯坦的主張。於是，作者虛構了高斯、黎曼和愛因斯坦的個人筆記，其中討論要點乃是高斯曲率、黎曼幾何與愛因斯坦的廣義相對論。正是由於 1919 年廣義相對論被愛丁頓爵士領導的英國科學遠征隊所證實，所以，維傑與泰勒法官終於找到了和解的可能性了。於是，維傑最後被法官無罪釋放了。

第 8 章由法官泰勒的日記揭開序幕，其中他交代了自己如何反思宗教信仰本質問題，與維傑的相關對話，從而決定無罪開釋維傑，以及千里迢迢到孟買訪問維傑的心路歷程。另一方面，在尼可這一邊，他的「思考無限」課程也進入最後一堂的總結。顯然為了呼應法官「選擇允許一位無神論的數學家的辯論來改造我信仰的結構」，尼可提供了好幾個學派如柏拉圖主義、形式主義、邏輯主義、建構主義 (或直觀主義) 以及擬經驗論 (quasi-empiricism) 有關數學知識確定性的主張。其中，拉維特別喜歡擬經驗論，因為

它的支持者論證真理不是從公理流向定理，而是從定理流向公理，而且，定理本身是經由嘗試錯誤和實驗而發現。我喜歡擬經驗論，因為它沒有在數學學習和其他形式的學習之間劃上一條清楚的界線。數學就像其他任何東西一樣，被看成一種人類的追求。爺爺離開摩里塞的時候，已經轉變成為擬經驗論者了。

最後，拉維追隨尼可選擇數學研究的生涯，並與克蕾兒共組家庭，過著他認為很有意義的日子！

三、評論

這本數學小說有兩條敘事軸線，第一條以現代的印度留美學生拉維為主角，第二條則是以拉維的爺爺數學家維傑為主角。再加上敘事者是第一人稱的拉維，這兩條古今軸線不時交錯，自然地牽引出一段歷久彌新的數學佳話。作者顯然企圖在事實的數學 (factual mathematics) 與虛構的敘事 (fictional narrative) 之間，尋找一個灰色地帶，呈現數學家進行數學研究的有血有肉形象。其實，這種新的文類書寫，亦即如何將數學與小說融為數學小說 (mathematical fiction)，始

終是科普作家的敘事挑戰。不過，本小說作者完成此一使命，殆無疑問。

既然如此，為什麼本小說英文標題要訂為“A Certain Ambiguity”呢？一語雙關，A certain ambiguity既表示「確定模稜兩可」，似乎也有「若干模稜兩可」的意思。事實上，本書主旨完全圍繞在數學知識的確定性 (certainty) 及其所遭遇的挑戰，儘管後者引伸出知識本質的模稜兩可來，不過，「確定」才是正位！

數學知識確定性之意義，的確是本書主旨。誠如作者所交代，本小說創作靈感源自數學史家克萊因 (Morris Kline) 的《數學：確定性的失落》(Mathematics: The Loss of Certainty) (中譯本由翁秉仁等負責，台灣商務印書館出版)。所以，我們建議讀者在掌握整個故事脈絡之後，可以設法遵循作者所安排的歐幾里得《幾何原本》之相關命題證明 — 那些都是國中數學題材，如此便能多少掌握所謂數學確定性的意義。此外，有關無限集合的意義及其相關結果的簡要論證，也很容易「一睹芳澤」才是，唯一需要的，只是一點點耐心罷了。

總之，這是一本不落俗套的(數學)小說，無怪乎它在數學小說網站 (mathematical fiction) 獲得極高之評價。誠然，在本書中，作者以小說敘事為經，以數學知識本質(或數學哲學)為緯，在小說角色安排、情節過場中，適時切入確定性的相關議題，頗有認知方面的關懷與考量，因此，這當然是一本非常成功書寫的科普讀物！我們深信：在本小說所提供的知識確定性之演化脈絡中，讀者一定可以深刻體會知識 vs. 信仰，乃至於邏輯 vs. 意義的張力。當然，如果讀者一時覺得閱讀的「承擔」太重，那就好好地欣賞這個有趣的故事就行了。

四、導讀策略

由於本書相當受到中學數學教師的歡迎，因此，我們特別提供這個導讀策略，聊供老師們打算與他們的學生分享閱讀經驗時參考與借鑑：

- 本書主要角色，人物個性與對話。
- 提及或運用哪些數學知識？請一一條列。又，為什麼？
- 順著前一問題，小說情節與數學知識如何結合？
- 作者敘事(說故事策略)有何特色？譬如敘事軸線，以及情節與伏筆的安排等等。
- 哪些數學可以直接拿到數學課堂(而非課外活動閱讀時間)上討論？
- 本書所論及的數學哲學立場有哪些？為何與本書故事相涉？

等等。

優秀數學科普作品的指標

評價方式：指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

1.知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)

- (1) 認識論面向 ☆☆☆☆☆
- (2) 方法論面向：☆☆☆☆☆
- (3) 歷史或演化面向：☆☆☆☆☆
- (4) 哲學面向：☆☆☆☆☆
- (5) 教育改革面向：不適用
- (6) 與自然科學、人文社會乃至生活經驗的連結：☆☆☆☆☆

2.形式或表達 (Form or representation)

- (1) 創新手法：☆☆☆☆☆
- (2) 數學知識的洞察力：☆☆☆☆☆
- (3) 歷史事實的洞察力：☆☆☆☆☆
- (4) 異文化的啟蒙意義：☆☆☆
- (5) 忠實可靠的參考文獻：☆☆☆☆☆
- (6) 敘事的趣味性、可及性與一貫性：☆☆☆☆☆
- (7) 中譯本的品質：☆☆☆☆☆ (自評，僅供參考)

3.內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form)

- (1) 青少年層次：☆☆☆
- (2) 一般社會大眾：☆☆☆

4.摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage)：

(法官泰勒對維傑說：)

你作數學的唯一理由，是因為你相信數學物件存在於人類心智之外。這是你的出發點。就像我的出發點是對上帝的信仰一樣。但是，我們兩人的出發點只是——也必定只是——信念而已。

……

我們的協議完成得如此快速和突然，大大出乎我的意料之外。我本來預期他會全力地反抗這個等價關係；然而，很明顯地，他的思考方向非常類似。然後，我才驚覺我所作所為的重要性。在一瞬間，我將我對上帝的信仰和一位數學家對絕對數學的信念，劃上了等號，而這兩者都在我們兩人的理性思考之外。但是，我並不孤獨，因為維傑有正面對著他所失去的普遍性和絕對性。

「讓人驚訝的是，我們人類可以被吸引到如此不同的事物上。我們的……信仰……，可以有如此不同的形式。」他說。

這的確讓人驚訝。人類的經驗讓我們渴望找出永恆和真實的事物，一個深觸心房、有意義的事物。而意義，不管是什麼種類，要求的就是信仰。(p. 285)