

義大利爺爺帶著你愛上幾何

洪萬生

台灣師範大學數學系退休教授

書名：愛上幾何 (Mr. Quadrato)

作者：安娜·伽拉佐利 (Anna Cerasoli)

中譯者：洪詩雅

出版社：圓神出版社

出版年：2009

頁數：191

國際書碼：ISBN 978-986-136-196-3



一、前言

這是義大利高中數學老師安娜·伽拉佐利 (Anna Cerasoli) 所撰寫的一本數學普及讀物。作者從日常生活中俯拾幾何知識，內容包羅萬象，手法深入淺出，是中學數學教師專業發展的一種範例，非常值得大力推薦。

本書作者還有另外兩本中譯數普讀物問世，分別是《愛上數學》與《10分鐘愛上數學》。前者之深度書評，請參考本欄王文珮老師的文章，至於後者我們也將另文提供。

二、內容簡介

本書共有 17 章，目錄依序如下：

- Chapter 1 非關童話
- Chapter 2 停下來種個田
- Chapter 3 畢氏史奴比
- Chapter 4 吹毛求疵的歐幾里德
- Chapter 5 根號 2 小姐
- Chapter 6 聰明的公主
- Chapter 7 輪子企業集團
- Chapter 8 阿爾罕布拉宮的可麗餅、三明治和甜點
- Chapter 9 雙胞胎、兄弟、堂兄弟……還有朋友
- Chapter 10 正方形先生的空間觀
- Chapter 11 橘子與企鵝
- Chapter 12 天才的弱點
- Chapter 13 豪情五兄弟
- Chapter 14 鏡子 星球和彗星
- Chapter 15 來自倫敦的問候
- Chapter 16 不用直尺與圓軌
- Chapter 17 一個信任的問題

本書一開始就「非關童話」！第 1 章就介紹與長方形相關的等周問題，¹充分顯示：儘管作者的敘事方式完全採取八歲的菲洛與爺爺對話，不過，對白一點也不童言童語！這種書寫的企圖心，大大地顛覆了所謂童書的刻板印象，真是叫人拍案叫絕。

第 2 章從古埃及的《蘭德紙草書》(*Rhind Papyrus*) 談起，說明圓形、正方形、長方形和三角形之在建築方面的實際用途，以及它們的特性，尤其是三角形的穩定性。第 3 章介紹畢氏定理，以及畢氏學派的有(擬)形數 (*figurative number*) 概念，乃至於如何運用它，以得知：連續相加的奇數等於平方數。第 4 章主題是歐幾里德(得)，重點是他對數學知識嚴密性 (*rigor*) 的「吹毛求疵」。譬如，正八邊形必須配合正方形，才能鋪滿整個平面，作者顯然演示 (*demonstrate*) 了嚴密推理的必要性。再有，她爲了強化直覺的不一定可靠，也舉了讀者耳熟能詳的「錯覺」例子，來進行簡要的說明。最後，針對歐幾里得的集大成古希臘幾何學之貢獻，作者也給出了相當合宜的評論，值得引述如下：

歐幾里德可不是只做彙集的工作而已喔，會讓這本書（按：即《幾何原本》）

¹ 亦即在等周長的長方形中，哪一個面積最大？這是國中代數問題，極易解決。若將問題中的圖形改成三角形乃至於簡單封閉曲線 (*simple closed curve*)，那麼，儘管達亦容易猜測得到，但是，證明卻相當困難，非得需要高中以上數學知識不可！

成為曠世鉅作的原因是，他把當時所有的幾何學整理出一套系統。等等喔，讓我想想怎麼跟你解釋會比較清楚。好，我想到了。看到我的時鐘了嗎？如果我們把它拆開來，我們就有一些鐵製品、塑膠製品、和玻璃，不過只有這些零件，時鐘並不會走，只有當這些零件組成一套有組織的系統之後，時鐘才會走動。(頁 32-33)

在第 5 章中，作者布置一個不可公度量 (incommensurable) 的情境，介紹 $\sqrt{2}$ ，對於此一無理數的起源及幾何意義，提供了頗為貼近學生認知的說明。在第 6 章中作者則利用維吉爾 (Virgil) 的史詩故事，再度指出圓形與等周問題之關連。其中，作者提及圓周率之性質，並且介紹一種直觀的方法，「重新發現」阿基米德圓面積公式 $(1/2)C\pi$ ，其中 C 為圓之周長。順著圓形的話題，在第 7 章，作者以「輪子企業集團」為題，介紹與圓有關的齒輪與滑輪之機械裝置，當然免不了又提及阿基米德及其防守敘拉古的故事，最後，則說明變速腳踏車的齒輪原理。另一方面，圓形的可麗餅煎製所涉及的對稱性，則在第 8 章成為主題，其中還包括摺紙與剪紙，以及平面鑲嵌的 17 種圖案，這一設計可以連結到公元 1400 年穆斯林的阿爾罕布拉宮之裝飾圖形。不過，作者也提及荷蘭人艾薛爾 (M. Escher) 是第一個整理這些圖案的畫家，至於證明得知只有 17 種，則是數學家波利亞 (George Polya) 的貢獻 (1924 年)。在進入「立體圖形」的主題之前，作者運用「雙胞胎、兄弟、堂兄弟……還有朋友」為比喻，引進仿射變換 (affine mapping) 與射影幾何 (projective geometry)，並且指出：「就連現在那些用電腦做出許多特別又美麗的電影特效，也是要遵循射影幾何的法則。要是沒有射影幾何的話，有的電動玩具也不會存在了，這樣有些父母應該會很高興。」

從第 10 到 13 章，作者主要介紹立體圖形。在第 11 章中，她的手法是運用立體概念，引進畢氏定理的三度空間延拓： $a^3 + b^3 = c^3$ ，然後，將此一命題解讀為：給定一個正立方體（邊長為整數），是否可以拆成兩個整數邊長的較小正立方體？最後，引進費馬最後定理，以及最終由懷爾斯 (Andrew Wiles) 的完成證明。在第 11 章中，她以「橘子與企鵝」為標題，說明球體的克卜勒裝填問題，以及球體的等周性質與企鵝的保暖作用。在第 12 章中，她敘述了阿基米德利用浮力原理證明皇冠造假，從而「重新發現」阿基米德的球體積公式：

靠一點直覺、一些試驗還有溢出來的水，他發現在等邊圓柱體裡放置一個跟它有相同半徑的球體，此球體會占圓柱體體積的三分之二！

至於第 13 章，作者則是介紹五個柏拉圖正多面體：正四面體、正六面體（或正立方體）、正八面體、正十二面體，以及正二十面體，以及與此連結的柏拉圖宇宙論。

第 14 章的主題是圓錐曲線，作者運用阿基米德的拋物面鏡，來引進拋物線，接著，再利用沙漏的傾斜來展示圓錐體的截痕：拋物線、圓、橢圓，以及雙曲線。當然，她也介紹橢圓的給定雙焦點之畫法，以及它的焦點之反射特性。第 15、16 章主題是拓樸學。先是在第 15 章，作者利用倫敦的地鐵地圖，引進拓樸概念，再進而討論柯尼斯堡七橋問題的解決與一筆畫之關係。至於第 16 章，作者則介

紹凸多面體的歐拉公式： v (頂點數) + f (面數) - e (邊數) = 2。並且，她還進一步說明此一公式在拓樸變換 (topological transformation) 底下，是一個不變式 (invariant)！連帶地，她也說明何以拓樸學是幾何學的一個分支。當然，爲了吸引讀者的興趣，作者也不會忘了提及莫比烏斯環帶 (Möbius Band) 及其應用，因爲那是科普書寫的賣點之一。至於第 17 章，也就是最後一章，作者介紹球面上的幾何學，以及那些命題與歐氏幾何的平行公設之關係。

三、評論

就一本「童書」而言，本書內容非常紮實，絕非一些科普童書的內容之清淡到完全無味可以相提並論。無怪乎義大利都靈大學推薦爲指定閱讀的科普作品。因此，我們非常鄭重地推薦本書給中、小學教師，以及有意拓寬數學視野的家長與學生。當然，教師在透徹理解之後，願意與學生分享閱讀經驗，更是善莫大焉。

本書文類可以說是一種對話錄，不過，它又無法與伽利略的《兩種新科學的對話錄》(Dialogue on Two New Sciences) 相提並論，蓋後者有三人對話，而且其中兩人始終針鋒相對，試圖在互相詰難中引出真理。至於本書，則比較像是一位諄諄善誘的老師，充分利用比喻手法，適時地在日常生活經驗之中，切入一些相關的數學主題。這種寫作手法，曾被很多數學普及作者所採納，至於成功與否，則完全取決於敘事情境如何烘托數學知識的需求與呈現。由此一標準來看，本書可以說相當成功，也見證了作者的教學經驗與寫作手法的密切結合。

另一方面，由於本書內容結合歷史事實或生活經驗，因此，它相當重視數學的實用面向，而這當然也是學習的需求之一。至於在呈現數學的美與真方面，作者在演示「重新發現」的歷程時，提供了認識論與方法論兩方面極爲深刻的洞察力。因此，本書既是作者的數學專業知識之展現，同時，也適度地分享了她的數學教學功力。

最後本書有一些錯誤，必須在此訂正，希望讀者務必留意：

頁 44、129：四分之三應該改爲三分之四，因爲球體積 = $(4/3)\pi r^3$ ，其中 r 爲半徑。

頁 49： $\sqrt{2}$ 是無理數的證明，應該出自亞里斯多德，而非歐幾里得。

頁 103：歐幾里德(得)並「未」給我們一個計算體積的捷徑公式！事實上，《幾何原本》全書並未給出長度、面積或體積的公式。

頁 136：正四面體圖形有誤，本頁提供的圖形是方錐體(或金字塔)(有五個面)。

頁 156：阿波羅·尼阿斯應該更正爲阿波羅尼阿斯 (Apollonius)。

頁 159-180：拓撲應更正爲拓樸。

頁 165：歐拉教導公主「集合論」不知何所指？

頁 188：最後一段之敘述有誤，請中譯者務必依據原文更正。如果原文有誤，請注意《幾何原本》第一冊的 23 個定義所對應的概念，並非所謂的公理。事實上，在介紹了這 23 個定義之後，歐幾里得隨即引進五個設準 (postulate) 以及五個公理 (common notion) — 這十個被認定爲真的命題，目前都統稱爲公理。

優秀數學科普作品的指標

一、評價方式

指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

1. 知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)
 - (1) 認識論面向 (Epistemological aspect) : ☆☆☆☆
 - (2) 方法論面向 (Methodological aspect) : ☆☆☆☆
 - (3) 歷史或演化面向 (Historical or evolutionary aspect) : ☆☆☆
 - (4) 哲學面向 (Philosophical aspect) : ☆
 - (5) 教育改革面向 (Education reform aspect) : ☆☆☆
 - (6) 與自然科學、人文社會乃至生活經驗的連結 (Connections with natural science, social sciences and humanities as well as daily experiences) : ☆☆☆
2. 形式或表達 (Form or representation)
 - (1) 創新手法 (Innovative approach: new story on old stuffs) : ☆☆☆
 - (2) 數學知識的洞察力 (或洞識) (Insight into mathematical knowledge: inspiring and revealing) : ☆☆☆☆
 - (3) 歷史事實的洞察力 (或洞識) (Historical insight or a sense of history) : ☆☆☆
 - (4) 異文化的啟蒙意義 (Enlightening in cultural mathematics) : ☆☆
 - (5) 忠實可靠的參考文獻 (Integrity with references) : ☆
 - (6) 敘事的趣味性、可及性與一貫性 (Narrative in an interesting, accessible and coherent way) : ☆☆☆
3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form)
 - (1) 兒童層次 : ☆
 - (2) 青少年層次 : ☆☆☆
 - (3) 一般社會大眾 : ☆☆☆
4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage) :

一個正方形就像是一艘太空船。是的，你沒聽錯，一艘太空船！對古代人來說，想像一個正方形就跟想像一艘太空人的太空船一樣。他們從來沒有看過一個形狀這麼特別的圖形，那時在他們四周沒有任何的建築物，自然界裡也不存在正方形這種形狀。從前，正方形不存在的！其實，認真說起來，古人只能看到圓形，像是月亮的形狀、石頭丟到水裡引發的一圈圈漣漪、小雛菊的花冠或是彩虹，或是蝸牛殼上的螺旋形，但肯定沒有看過正方形。事實上，住山洞的時代過了以後，古代人所建的第一個家是圓的，一個屋頂用動物皮做成的圓形小屋。正方形對他們來說是個未來的東西，要想像一個正方形，設計它，更進一步的把它做出來，可是需要很高的智慧。(頁 7-8)