

高斯 Johann Carl Friedrich Gauss

陳彩鳳

江翠國中退休數學老師

一、高斯的生平

1777年4月30日，德國的布倫茲維克城 (Brunswick) 誕生了偉大的數學家高斯 (Carl Friedrich Gauss, 1777~1855)，他不只是數學家，更是天文學家。

他不但被認為是十九世紀最偉大的數學家，而且與阿基米德、牛頓及尤拉並稱為歷史上最偉大的四位數學家。高斯的祖父是農民，父親除了從事園藝的工作外，也當過各式各樣的雜工，如護堤員、建築工等等。



母親是一名石匠的女兒，在三十四歲時才結婚，三十五歲生下了高斯，而她有一個很聰明的弟弟弗里德里希 (Friederich)，他手巧心靈，是當地出名的織綢能手。高斯的這位舅舅，一有機會就儘可能啓迪高斯的邏輯思維能力。高斯日後對早逝的舅舅惋惜道：「我們失去了這樣一位業已誕生的天才。」


二、數學神童

傳說在高斯十歲時，他的小學老師布特納 (Buttner)，出了一道算術難題：

$$\text{計算 } 1+2+3+\dots+100=?$$

每當考試時，第一位寫完的同學將石板（當時作為寫字用）面朝下放在老師的講桌上，第二位寫完的就將石板放在第一位同學的石板上，...就這樣一片一片疊起來。

布特納心想這可難為初學算術的學生，但是高斯卻在幾秒後將答案解出來；在師生驚奇中，他詮釋如何解題，他找到了算術級數（等差級數）的對稱性，就像求得一般算術級數和的過程一樣，把數目一對一對地湊在一起。

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$


每一組都是 101，共有 50 組，因此總和為 $101 \times 50 = 5050$ 。多漂亮的解法啊！

高斯在十一歲的時候就發現了二項式定理 $(x + y)^n$ 的一般情形，這裡的 n 可以是正負整數或正負分數。

當他還是一個小學生時就對無窮的問題注意了！

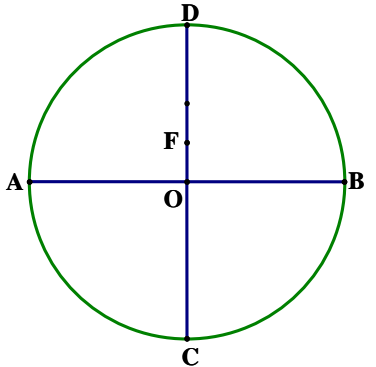
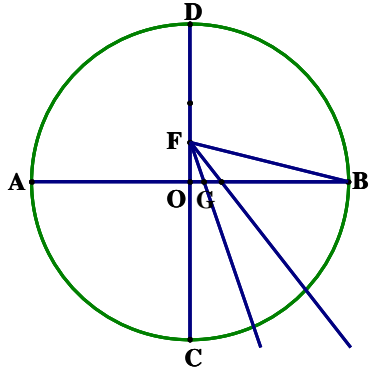
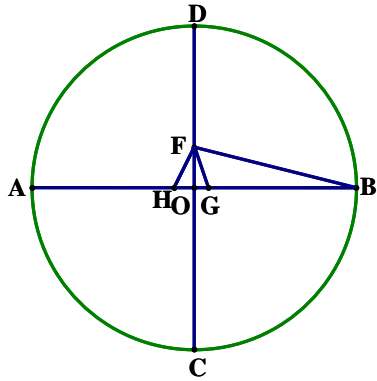
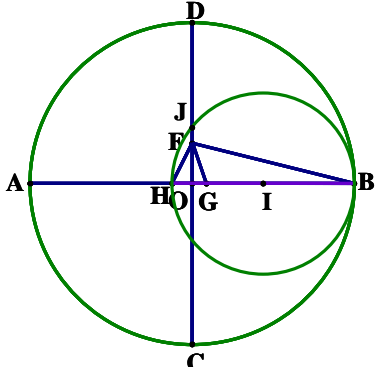
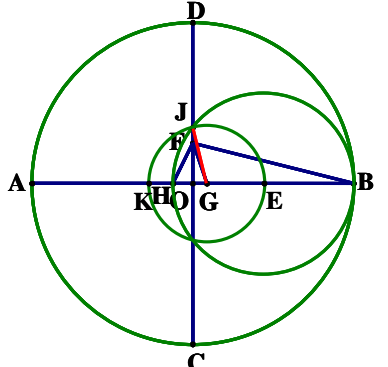
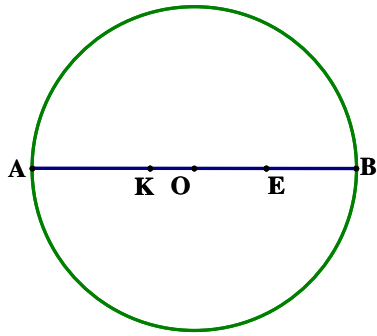
三、正十七邊形

高斯用代數方法解決了二千多年來的一個幾何難題，在 1796 年 3 月 30 日他十八歲的前夕，這個數學上的新發現，使他決定終生研究數學，這也奠定了高斯

在數學界不朽的地位。

此一發現在數學史上是很重要的，高斯用歐氏工具（直尺、圓規）作圖解決了一個令歐幾里得「頓挫」的問題。他證明了一個圓內接正 17 邊的多邊形，對此發現他既高興又驕傲。

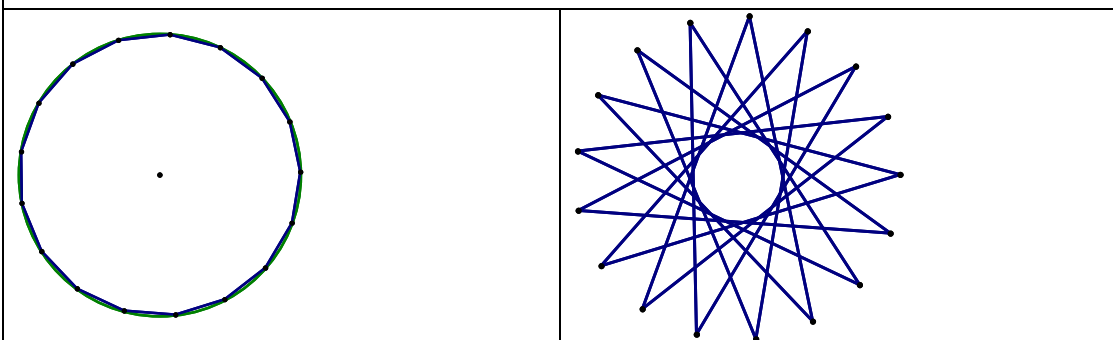
以下是在 1893 年數學家理查蒙 (H. W. Richmond) 簡化高斯用尺規構造正十七邊形的方法，其步驟如下：

| | | |
|--|--|--|
| <p>先畫出一圓 再畫出兩條互相垂直的直徑 AB 和 CD 再將 OD 線段四等分</p>  | <p>連接 FB 線段 再將 $\angle OFB$ 四等分</p>  | <p>連接線段 FG 作 $\angle GFH = 45$ 度</p>  |
| <p>取線段 HB 的中點 I 以 I 為圓心 線段 IH 為半徑畫圓 交線段 OD 於 J 點</p>  | <p>連接線段 JG 以 G 為圓心 線段 JG 為半徑畫圓 交線段 AB 於 E 和 K 點</p>  | <p>只留下直徑 AB 和圓心 O 及 K、E 兩點</p>  |
| <p>過 E 和 K 點作線段 AB 的垂直線</p> | <p>交圓於 N 和 P 兩點</p> | <p>作 $\angle NOP$ 的角平分線 OQ 交圓 O 於 Q 點，or 連接 NP 線段，再作 NP 線段的中垂線交圓弧 NP 於 Q 點</p> |

| | | |
|--|---|---|
| | | |
| <p>以 N 為圓心, 線段 NQ 為半徑依次畫弧</p> <p>沒通過 A 點 !</p> | <p>依次交圓周於 RSTUVWXYZ A' B' C' D' 且通過 B 點 !</p> | <p>依次連接 QNRSTUVWXYZA'B'B C'D'PQ 則十七邊形 PQNRSTUVWXYZA'B' BC'D' 即為所求</p> |

尺規作出正十七邊形，使他在數學家裡一夕成名，他是那麼的興奮，因此決定一生研究數學。據說，他還表示希望逝世後在他的墓碑上能刻上一個正十七邊形，以紀念他少年時最重要的數學發現。然而，高斯的紀念碑上卻刻著一顆十七芒星，原來是負責刻紀念碑的雕刻家認為，正十七邊形與圓形太像了，大家一定分辨不出。

正十七邊形的確很接近圓！



四、一生的成就

高斯一生共發表 155 篇論文，他對待學問十分嚴謹，只是把他自己認為是十分成熟的作品發表出來。高斯若把他的所有發現都發表出來，則目前的數學將要往前推進 50 年。

終其一生，高斯總是將答案寫下，不留一點計算痕跡，而且他對自己寫的答案有絕對的把握。

他說過「數學是科學的皇后，而數論是數學的女王。」那個時代的人稱高斯是「數學王子」。

肖像能被放在郵票和鈔票上，足見高斯在數學界崇高的地位！

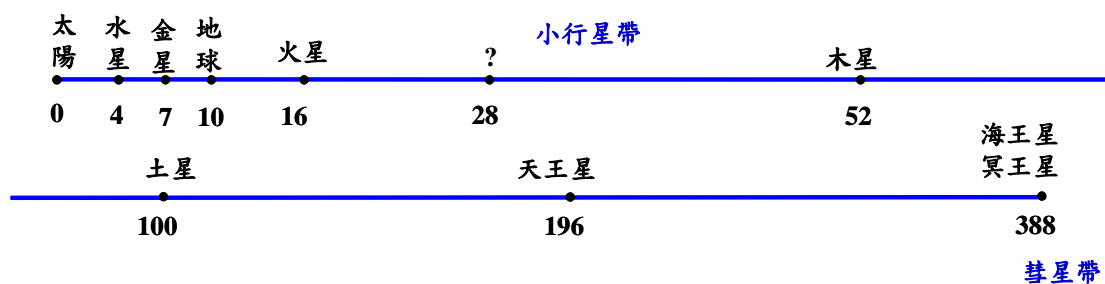


五、高斯在天文學上的成就

24 歲開始，高斯放棄在純數學的研究，有幾年專心研究天文學，其實是因為他不能在大學裡找到工作，他又不願意永遠靠費迪南公爵的恩賜過日子，因此他選擇報酬不錯且較穩定的職業，成為專業的天文學家。他最初研究月球的運轉規律他的方法及公式和歐拉的不同，後來有一件事吸引他的注意，因此顯出他的才華。

在 1776 年一個德國數學家提丟斯 (J. Titius) 發現太陽和行星距離的經驗規則:

有一數列 $0, 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, \dots$ ，即從第三項開始後項為前項的 2 倍，把這個數列每項逐次加上 4，得到數列 $4, 7, 10, 16, 28, 52, 100, 196, 388, \dots$ ；Titius 和天文學家波得 (J. Bode) 發現這些數接近水星、金星、地球、火星、木星、土星到太陽的距離的比，



可是，當時 28 的位置上卻沒有行星。到了 1781 年，英國天文學家威廉赫歇耳 (W. Herschel) 發現了天王星位置在 196 的地方。因此根據提丟斯一波得定則，人們猜測在 28 的地方應該有顆星還未被發現。

1801 年的大年夜，意大利巴勒摩的天文學家發現在 28 的位置有一顆新星，它被命名為「谷神星」(Ceres)，現在我們知道它是在火星和木星之間的幾千個小行星組成的小行星帶 (Asteroid belt) 中的一顆小行星。可是當時歐洲天文學家之間意見分歧不一，有人說它是行星，有人認為它是彗星。必須繼續對這新星觀察才能判定，可是當人們想要觀察時，它卻杳然失去蹤影。一開始人們就不知道它的軌道是圓，還是橢圓或是拋物線，決定它的實際軌道是個很困難的問題。

在這顆星被發現後的六個月，天文學家還不能決定它的軌道是怎麼樣。高斯這時對這個問題產生興趣，他決定解決這個捉摸不到的星體軌跡的問題，由於用以前的天文學家的方法來找太麻煩了，高斯自己獨創了只需要三次觀察就可以用來計算星球橢圓軌道的方法。他可以極準確地預測行星的位置。人們利用他的方法去算，果然準確無誤地找到谷神星所在的位置！

1802 年人們又用他的方法準確地找到小行星二號...智神星 (Pallas) 的位置，而且人們利用他所發現的方法可以計算彗星的軌道，只需要一兩小時的時間，而舊的方法卻需要三、四天才能完成。

六、高斯的座右銘

“Few but ripe.” (「稀少，但成熟」)

所以，他不多寫，寫成的作品則以敘述簡潔，內容豐實著稱。

在德國慕尼黑的博物館裡有一幅高斯的油畫像，底下幾行字很貼切地說明了高斯的成就：「他的思想深入數目、空間及大自然的最深秘密；他測量星星的路徑、地球的形狀和自然力；他推動了下一個世紀的數學進展！」

參考資料

李學數，《數學和數學家的故事》，新竹：凡異出版社。