梅氏家學中的《幾何原本》－以勾股術為例

廖淑芳

苗栗縣照南國中

一、 前言

明末輸入中國的西方數學著作中，歐幾里得 (Euclid)《幾何原本》(*The Elements*)最能代表西方數學的精髓和特色。十七世紀初，透過徐光啓 (1562～1633) 與利瑪竇 (M. Ricci, 1552～1610) 之攜手，《幾何原本》前六卷的中譯得以刊印發行，正式傳入中國，展開其對中國的算學的深遠影響。當時中國的知識份子在面對西學的強勢挑戰下，爲了『合理化』向西方學習的行動，或者爲『中西會通』建立基礎，遂喊出『西學中源』的口號。[1]其中，清朝第一算學家梅文鼎爲了實現其中西會通的想法，在吸收、整理西學的同時，企圖探求中西數學的一致性，其會通精神的具體實踐『幾何即勾股』之說，可謂勾股術之『西學中源』的代表。

梅文鼎則認爲幾何就是勾股，是翻譯中書的人因不明白勾股的含意，錯把西算中的勾股譯成幾何。[2]梅文鼎認爲中國傳統的勾股算術與西方傳入的幾何學，雖然形式不同，但原理卻可以互通。因此撰《幾何通解》一卷，企圖以「勾股解《幾何原本》之根」，書中以實例說明如何借助勾股術的恆等變換來證明《幾何原本》前六卷中的十五個命題，其目的便是在宣揚「幾何不言勾股，然其理并勾股也」的論點。[3]

梅轂成於 1713 年奉康熙之命，參與編寫《御製數理精蘊》，內容主要包括當時從西方傳入的數學知識，當然也收入不少中國古代的問題。《數理精蘊》下編卷十一「帶縱開方」中，提供了三種證明方法來說明勾股問求問題中的部分類型。但在《數理精蘊》下編卷十二及卷十三中的勾股互求術中，使用最頻繁的還是出入相補法。梅轂成編寫下編卷十二、十三時，應是把梅文鼎的《勾股舉隅》一書作爲重要參考書，因爲在《勾股舉隅》中的第一到第十二問所列的算法及證明大致皆收入《數理精蘊》中。梅轂成之後，梅氏家學的最後代表－梅沖是梅文鼎的玄孫，也是家族中最後一位出現於羅士琳《疇人傳續編》的後人，他的算學著述《勾股淺述》，主要以詳明梅文鼎的《勾股舉隅》爲主，企圖於普及數學知識的同時，宣揚家學，其梅家之勾股精神自然爲該書之重點。本文主要就梅文鼎《幾何通解》、梅轂成《御製數理精蘊》、梅沖《勾股淺述》三書，略探一二，來初窺梅氏家學與《幾何原本》之關聯。

二、梅氏家學之承繼

梅文鼎 (1633-1721)，字定九，號勿庵，安徽宣城人。自幼聰明好學，早年拜塾師羅王賓、陳明卿、陳蜚伯等爲師。[4]在父親梅士昌和羅王賓的指導下，九歲時已「熟五經，通史事，有

---

[1] 參見洪萬生，〈當梅文鼎遇上幾何原本〉，《科學月刊》。
[2] 參見劉洪濤，《數算大師梅文鼎與天文曆算》，頁 70-71。
[3] 引自梅文鼎，《勿庵曆算書目》，頁 36。
[4] 參見黃清揚，《1368-1806 年間的勾股術發展之研究》，頁 62。

神童之目」。[5]按梅文鼎的說法：「鼎自童年受《易》于先大父，又側聞先君子餘論，謂象數學學儒者當知，謹識之不敢忘。」[6]在幼年時，其父與羅王賓常指著天上繁星，教他辨識三苑二十八宿的形狀和位置，並耳提面命地告誡他：「象數之學，儒者當知」，[7]進而培養了他對曆算學的濃厚興趣。29 歲時，拜同里的竹冠道士倪正（1616～？）為師，[8]學習明代頒用的《大統曆法》，之後根據自己的理解，寫成他的第一部曆學著作《曆學駢技》。[9]

縱觀梅文鼎一生，除了曾參加編寫《明史・曆志》的工作之外，終身鑽研數學和曆法，不曾有過任何官職。此外，他也得到不少友人的幫忙和支持，晚年更得到康熙皇帝的賞識，使得他的學術地位更加穩固。[10]梅文鼎的著作對當時傳入中國的西方數學各分支，幾乎全有論述，他所著各書大多根據《幾何原本》（前六卷）、《同文算指》以及《崇禎曆書》為主要參酌。梅文鼎去世之後，魏荔彤的兼濟堂刊刻了《梅勿庵曆算全書》，由楊作枚編輯整理。梅瑴成認為該套書「仇校編次不善」，[11]故為之進行增減合併，更名為《梅氏叢書輯要》。[12]

梅瑴成 (1681-1712)，字玉汝，號循齋，又號柳下居士，為梅文鼎之孫。康熙五十一年（1712），受陳厚耀之薦，蒙皇恩入皇廷蒙養齋學習研究曆算，[13]並於 1723 年，完成《數理精蘊》的編寫。除了參與編寫《數理精蘊》、《曆象考成後編》，梅瑴成個人著作，僅有以《梅氏叢書輯要》的附錄出版的《赤水遺珍》一卷與《操縵巵言》一卷。其中，《赤水遺珍》匯集了梅瑴成的數學研究心得，內中共有 15 篇數學劄記；[14]《操縵巵言》則是梅瑴成關於天文學的短文集，共收錄了他的 18 篇論文或書信，其中不乏真知灼見。[15]梅瑴成還針對程大位《算法統宗》進行增刪，完成《增刪算法統宗》一書。其著述雖然少，但以其兼具梅氏曆算代表、御前數學家和朝廷重臣的三重身份，其言行對算學界都有莫大的影響。

宣城梅氏自梅瑴成之後，其孫梅沖是最後一位載於羅士琳《疇人傳續編》中者。然而有關梅沖之生平資料，實在太少，僅知其字抱村，生卒年不詳，其算學相關著作亦僅《勾股淺述》一卷。根據《宣城縣志》的記載：「嘉慶庚申恩科瑴成孫」、「宣城籍孫，法優貢生婺源教諭沖庚申舉人上元籍。」[16]可知梅沖曾以恩科中舉。李迪與郭世榮合編之《清代著名天文數學家・梅文鼎》則提及的梅沖習算簡歷：「乾隆五十一年，從數學家李潢（？～1811）學習，又研究《梅氏叢書輯要》與《數理精蘊》，對勾股有心得，注意通俗性」。[17]梅氏家學自梅文

[5] 參見李儼，〈梅文鼎年譜〉，《中算史論叢》，第三集，頁 517。
[6] 引自梅文鼎，《曆學駢技》自序，頁 1a，收入《梅氏叢書輯要》卷四十一，頁 1a。轉引自李迪、郭世榮，《清代著名天文數學家　梅文鼎》，頁 15。
[7] 引自梅文鼎，〈《曆學駢技》自序〉，《梅氏叢書輯要》卷四十一，頁 1a。
[8] 倪觀湖，名正，字方公，宣城人，明亡後隱居官湖（在縣城西北）之賓，因號觀湖，自稱竹冠道士，精天文。
[9] 關於梅文鼎何時開始跟倪觀湖學習，至少有三種說法：27 歲、29 歲、30 歲，錢寶琮先生認為應是 29 歲，與梅文鼎《曆學駢技》中的記戴較為合攏。詳文請參考李迪、郭世榮，《清代著名天文數學家　梅文鼎》，頁 20-21。
[10] 參見洪萬生，〈當梅文鼎遇上幾何原本〉，《科學月刊》。
[11] 引自梅瑴成，《梅氏叢書輯要，凡例》。
[12] 參見劉鈍，〈勾股舉隅、幾何通解提要〉，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙》第四分冊，頁 431。
[13] 參見徐世昌，〈勿庵學案〉，《清儒學案小傳》卷二十一，頁 594。
[14] 參見劉鈍，〈梅瑴成〉，收入杜石然主編《中國古代科學數學家傳記》，頁 1073。
[15] 同上註，頁 1074。
[16] 李應泰等修，章授等纂，《安徽省・宣城縣志》卷十五，頁 43、865。
[17] 引自李迪，郭世榮編著，《清代著名天文曆算家・梅文鼎》，頁 211。

鼎始興，漸消於梅沖，其勾股術之精神『幾何即勾股』歷五代未衰，也因此與西學關聯不斷。以下言梅氏家學之『幾何即勾股』，以窺其與《幾何原本》之關聯。

三、 梅文鼎之《幾何通解》

『幾何即勾股』是梅文鼎幾何觀的核心思想。梅文鼎所生活的時代，《幾何原本》已傳入中國，且有關《幾何原本》的著作也陸續出現。[18]然而，由於中西數學屬於不同的文化體系加上譯文的水平有限，亦難以爲多數人所理解和接受，[19]中西之爭時有所聞。梅文鼎認爲西方的『幾何』即中國傳統的『勾股』，因此企圖探求其中之關聯。其於《勿庵曆算書目》中，云：[20]

> 《幾何原本》為西算之根本，其法以點、線、面、疏三角測量之理，以比例、大小、分點疏算法異乘同除之理，由淺入深，善於晓譬。但取徑縈紆，引文古奥而峭險，學者�之多不能終卷。方位伯《幾何約》又苦太略，今遵新譯之意，稍為順其文句，芟繁補遺，而為是書。[21]

可知，梅文鼎爲了輔助學習者較快地理解和掌握最基本的幾何命題，曾就《幾何原本》進行刪簡，寫成《幾何摘要》一書，此心思與行動，便有益於《幾何原本》的普及與介紹。可惜，《幾何摘要》並未刊印、流傳下來。

幸而，梅文鼎的勾股相關著述中，與《幾何原本》有關的尚有《幾何通解》一書。梅文鼎於其《幾何通解》中，開宗明義指出要『以句股解《幾何原本》之根』，他認爲西方「幾何不言句股，然其理並句股也。故其最難者，以句股釋之則明。」故以中國《九章算術》中的『句股』來會通西方幾何，以證「信古九章之義，包舉無方」之功。[22]從《幾何原本》擇出數個命題，用勾股術中的公式予以論證。[23]表一介紹收錄在《梅氏叢書輯要》中第十八卷的《幾何通解》的目錄，至於本書之著述年代，則約在十七世紀後期。[24]

表一：《幾何通解》目錄

編號	目　　　錄
1	解幾何二卷第五題、第六題
2	解幾何二卷第七題
3	解幾何二卷第八題
4	解幾何二卷第九題
5	幾何二卷第十題
6	解幾何二卷第十一題，六卷第三十題、四卷第十、第十一題（解理分中末線之根）
7	解幾何六卷第二十七題

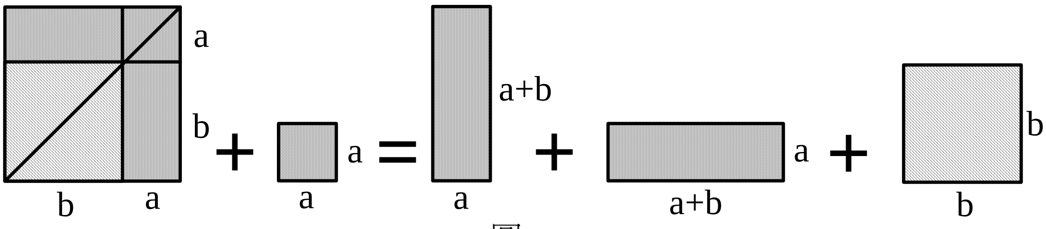
[18] 詳參梅榮照、王渝生、劉鈍，〈歐幾里得《原本》的傳入和對我國明清數學的影響〉，收入梅榮照主編《明清數學史論文集》，頁 53。
[19] 參見《安徽文化史》編纂工作委員會，《安徽文化史》，頁 1510。
[20] 以下有關梅文鼎對於《幾何原本》的研究之論述，其內容主要參考梅榮照、王渝生、劉鈍，〈歐幾里得《原本》的傳入和對我國明清數學的影響〉，收入梅榮照主編《明清數學史論文集》，頁 67－71。
[21] 引自梅文鼎，《勿庵曆算書目》。
[22] 本段引文引自梅文鼎，《幾何通解》，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙》數學卷，第四分冊，頁 1a。
[23] 參見劉鈍，〈《幾何通解》提要〉頁 432。
[24] 參見洪萬生，〈當梅文鼎遇上幾何原本〉，《科學月刊》。

8	解幾何三卷第三十五題
9	解幾何三卷第三十六、三十七題
10	解幾何三卷第三十二、三十三增題

現以《幾何原本》第二卷第七命題爲例，觀梅文鼎以勾股解《幾何原本》之趣。以下先言歐幾里得於《幾何原本》第二卷第七命題之證明：[25]

> 如果任意分一線段為兩段，則原線段上的正方形與所分成的小段之一上的正方形的和，等於原線段與該小線段構成的長方形的二倍與另一小線段上正方形的和。

如運用代數符號翻譯此一命題，則可表示爲：$(a+b)^2+a^2=2(a+b)a+b^2$。其中，此一原線段的長爲$a+b$。如圖一。

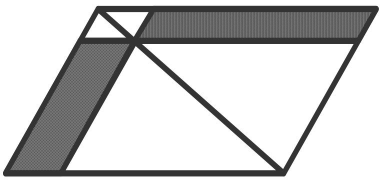


圖一

歐幾里得證明此一命題時，主要利用了《幾何原本》第一卷命題四十三：

> 在任何平行四邊形中，對角線兩邊的平行四邊形的補形彼此相等。

如圖二。我們只要依據圖二，觀察圖一，即可掌握歐幾里得如何證明卷二命題七。



圖二

梅文鼎於《幾何通解》中，將相當於歐幾里得命題的$(a+b)^2+a^2=2(a+b)a+b^2$解讀爲：

> 甲乙股冪，子戊句冪，併之，成癸寅弦冪。弦冪內有戊甲股，戊癸句，相乘長方形二，及句股較乙丙上方。

如圖三，梅文鼎的進一步說明如下：

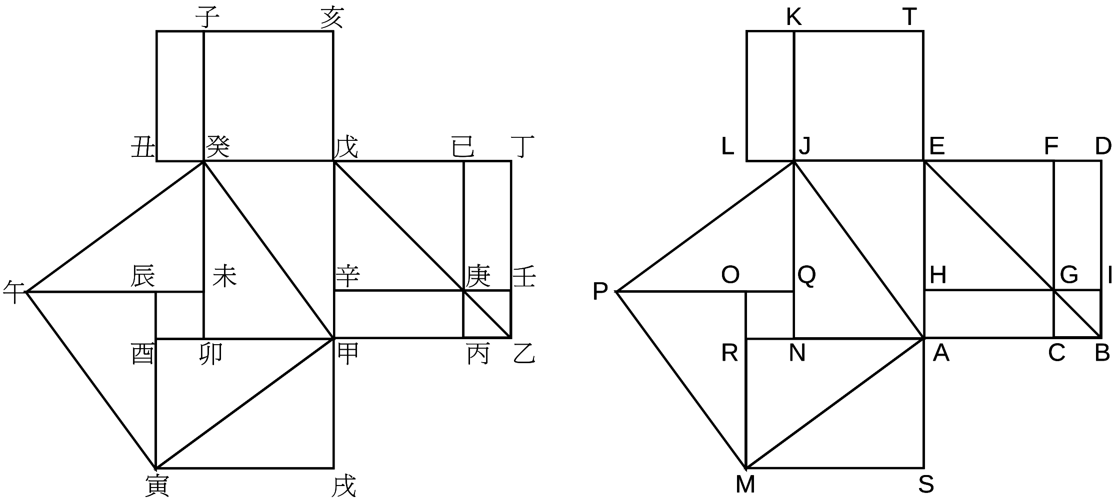
> 曰：試於戊癸線引長至丑，令丑癸如巳丁較（即乙丙）。遂作子丑小長方（與丁庚等），以益亥癸，成亥丑長方（與丁辛等，亦與巳甲等）。次於癸寅內，作甲酉、寅辰、午未、癸卯四線，皆與甲乙股等。自然有甲卯、寅酉、午辰、癸未四線，皆與戊癸句等。又自有未卯、卯酉等句股較，與乙丙較等，即顯弦冪內有句股形四，較冪一也。
> 試於弦冪內，移午辰寅句股，補癸戊甲之位，成戊卯長方（與巳甲等）；又移癸未午句股，補甲戊寅之位，成戊酉長方（與亥丑等）。而較冪未酉小方元與壬丙等。又子丑小長方元與丁庚等。

[25] 本段圖、文主要參考洪萬生，〈當梅文鼎遇上幾何原本〉，《科學月刊》。

合而觀之，豈非丁甲股冪及子戊句冪併，即與巳甲亥丑兩長方及壬丙小方等積乎？[26]

亦即，直角△AEJ 中，$\overline{AE}=a+b$ 、$\overline{JE}=a^2$ 、$\overline{JA}=c^2$ ，故 $\overline{JE}^2+\overline{AE}^2=\overline{JA}^2\to(a+b)^2+a^2=c^2$

又 $c'^2=4(\frac{1}{2}a'b')+(b'\text{-}a')^2\to(a+b)^2+a^2=2a(a+b)+b^2$ 。



圖三

梅文鼎利用句股定理與弦圖，及出入相補法將 $(a+b)^2+a^2$ 解讀爲一個句股形，其中，a^2 爲句冪、$(a+b)^2$ 爲股冪，將兩者相加得出弦冪，再根據趙爽〈勾股圓方圖〉的 $c^2=4(\frac{1}{2}ab)+(b-a)^2$ ，來證明 $(a+b)^2+a^2$ 相當於 $2(a+b)a+b^2$ 。

觀上所疏，可知梅文鼎進行幾何通解時，因爲『幾何即句股』的認知考量，故堅持依據中國固有的『弦圖』，來重構《幾何原本》命題的圖形及解讀。以本題爲例，梅文鼎的圖、解均較《幾何原本》原得複雜。不過，類似的進路，卻也引導他有機會在〈解《幾何原本》二卷第八題〉時提供遠較於歐幾里得簡易的圖示；如果我們再從一個漂亮證明必須滿足的『說明』(explanation) 功能來說，那麼，梅文鼎的『解』，對於現實教學的啓發就不無意義了。[27]梅文鼎《幾何通解》中所選擇的幾何命題，正如上例，均都含有二次項的恆等變換，因此不難藉助同樣屬於二次變換的勾股算術公式來表達，若欲以勾股術導出《幾何原本》中的命題是行不通的。[28]然而，梅文鼎於《勾股通解》中，能利用勾股元素去取代《幾何原本》原來命題中的某些線段，再靈活地運用勾股和較術、圖驗法得出欲求結果，其巧妙的論證思維，若非對《幾何原本》有一定程度的了解是無法順利撰成此書的。

四、 梅瑴成之《數理精蘊》

西元 1723 年時，由康熙御製、梅瑴成等人主編的《御製數理精蘊》大功告成。[29]全書分上、下兩編，上編五卷爲“立綱明體”，其中二、三、四卷爲《幾何原本》，是根據張誠、

---

[26] 引自梅文鼎，《幾何通解》，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙》數學卷，第四分冊，頁 2a-2b。
[27] 參見洪萬生，〈當梅文鼎遇上幾何原本〉，《科學月刊》。
[28] 參見劉鈍，〈《幾何通解》提要〉，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙》數學卷，第四分冊，頁 432。
[29] 參見韓琦，〈《數理精蘊》提要〉，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙》數學卷，第三分冊，頁 1。

白晉的法文譯本修訂的，共 12 章，分別講述了三角形、四邊形、圓及內接外切多邊形、立体幾何、比例、相似形、勾股定理、圓錐体及球與橢圓体的表面積和体積、幾何作圖法等內容。[30]下編的卷十二至卷二十九中，有中國學者學習和研究《幾何原本》等西方著述後得到的幾何學知識。全書中，有關勾股算術的內容主要見下編卷十二「勾股」、十三「勾股」、卷十八「測量」等三卷，另有少部分見諸下編卷十一的「帶縱平方」及卷十四「帶縱和數立方」中。[31]表二爲《數理精蘊》卷十二、卷十三之大要內容經整理：[32]

表二：《數理精蘊》卷十二、卷十三內容目錄

卷　　　名	類　別　名　目	題數
下編卷十一：面部一（平方、帶從平方）	帶縱平方	10 問
下編卷十二：面部二（勾股）	定勾股弦無零數法	4 問
	勾股弦相求法	4 問
	勾股形內求中垂線及容方圓等形	6 問
	勾股弦和較相求法（上）	33 問
下編卷十三：面部三（勾股）	勾股弦和較相求法（下）	12 問
	勾股積與勾股弦和較相之法	9 問
	正勾股比例[33]	8 問
下編卷十八：測量	勾股測量	9 問
	三角測量	12 問
下編卷二十四：帶縱較數立方	附勾股法四條	4 問
下編卷三十五：借根方比例（面類）		12 問
下編卷三十六：借根方比例（體類）		2 問

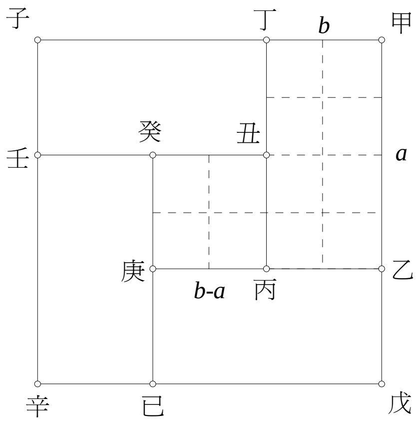
其中，勾股互求部份則出自梅瑴成之手，《數理精蘊》在卷十三「勾股弦和較相求法」中共列出了六十種勾股互求的問題，若將勾股弦相求法中的 3 問、勾股積與勾股弦和較相求之法中之 9 問，及附勾股法四條中的 4 問加上去，《數理精蘊》實際上總共給出了七十六種有關勾股互求的問題或題型。對於解決這些問題所需用到的數學知識，《數理精蘊》中用到了「帶縱開方」、「出入相補」、《幾何原本》的命題及「借根方比例」等四種方法。如十一卷「帶縱平方」中已知勾股積、勾股較一問即使用了帶縱開方、出入相補及《幾何原本》中的命題。本題所給的第一種方法爲帶縱開方，在這之後則爲「又法」，其算式爲：

[30] 參見鐘啓哲，〈日韓數學史料典籍研讀會之《數理精蘊（上）》導讀報告〉，http://math.ntnu.edu.tw/~horng/study/
[31] 參見韓琦，〈《數理精蘊》提要〉，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙》數學卷，第三分冊，頁 1。
[32] 本文中有關《數理精蘊》的內容整理及圖、表，主要參考黃清揚，〈中國 1368-1806 年間的勾股術發展之研究〉。
[33] 所謂正勾股，即指勾：股：弦=3：4：5 的勾股形。

$$b+a=\sqrt{4ab+(b-a)^2}$$

$$b=\frac{(b+a)+(b-a)}{2}$$

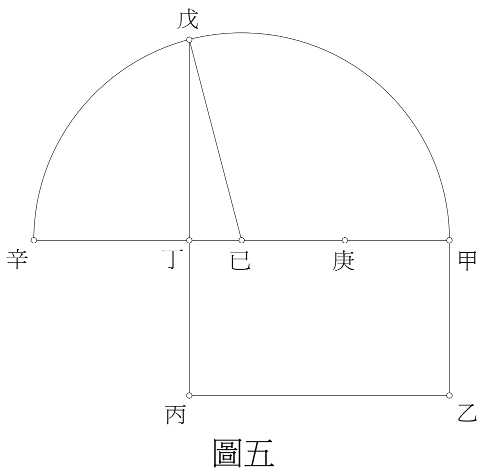
$$a=(b+a)-b$$



圖四

對此算式，《數理精蘊》的證明過程使用出入相補法。如圖四，正方形甲戊辛子中有四個面積爲 ab 的長方形與面積爲 $(b-a)^2$ 的小正方形丑丙庚癸，故四個長方形加上小正方形，即爲以勾股和爲邊長的大正方形。在此「又法」之後，本題另補了一個「又法」，其算式爲：$\frac{b+a}{2}=\sqrt{ab+(\frac{b-a}{2})^2}$，$b=\frac{b+a}{2}+\frac{b-a}{2}$，$a=\frac{b+a}{2}-\frac{b-a}{2}$。由算式來看，此與前「又法」是一致的。此法的證明的部分除了「出入相補」之外，另有引用巴蒂《幾何原本》中命題的方法，以下介紹後者：

> 甲乙丙丁長方形，容積八尺。將甲丁邊引長作丁辛與丁丙等，則甲辛為長闊之和。又如甲乙邊截甲丁於庚，則庚丁為長闊之較。甲辛和折半於已，而庚辛較亦折半於已。故以已為心，甲為界作一半圜，而引丙丁邊至戊界作一戊丁直線、戊已輻線。則甲已、戊已、已辛皆為半和，而庚已、已丁皆為半較，且甲丁、戊丁、丁辛又為連比例之三線矣。其戊丁中率自乘之方與甲丁首率、丁辛末率相乘之長方等。見幾何原本九卷第三節則是戊丁自乘之方與原設甲乙丙丁長方之積也。又戊丁已為勾股形，其戊丁邊自乘之方相併，而與戊已自乘之方等。見幾何原本九卷第四節故與原設甲乙丙丁長方積等之戊丁自乘之方加以已丁半較自乘之數，開方而得戊已為半和。[34]



圖五

[34] 引自《數理精蘊》下編卷十一，頁 34b-35b。

如圖五，甲乙丙丁為給定的長方形，甲丁＝b，丁丙＝a 。作丁辛＝丁庚＝丁丙＝a，再以甲辛 $(b+a)$ 為直徑作以圓心為己之半圓，延長丁丙與半圓交於戊，連戊已。則甲已＝戊已＝已辛＝$\frac{b+a}{2}$，庚已、已丁＝$\frac{b-a}{2}$，且依《幾何原本》九卷第三節，甲丁：戊丁＝戊丁：丁辛，也就是$戊丁^2=甲丁\times丁辛$=甲乙丙丁。又依《幾何原本》九卷第四節，可得$戊丁^2+已丁^2=戊已^2$，所以$\frac{b+a}{2}=\sqrt{ab+(\frac{b-a}{2})^2}$ 。

然而，在《數理精蘊》下編卷十二及卷十三中使用最頻繁的還是出入相補法。梅瑴成在編寫時，將梅文鼎的《勾股舉隅》中所列的算法及證明大致皆收入《數理精蘊》中，當然也有『幾何即勾股』之考量。此外，《數理精蘊》中的勾股互求部份既出於梅瑴成之手，相信梅瑴成對於解決這些問題的解法，應該都有所理解，亦即除了中國的「帶縱開方」、「出入相補」、「借根方比例」，他對於以《幾何原本》的命題來解題的西法，應也不陌生。當然，梅瑴成於忠實奉行「西學中源」說最顯著的例子是『借根方即天元一』。他透過《授時曆草》證明了「天元一即借根方解」，重複了康熙所散佈的「阿爾熱八達」[35]即東來法的神話。[36]他也贊成西人所謂「借根方法」，就是中國古代數學家使用的天元術，慶幸「遠人慕化，復得故物」，可謂梅氏家學『西學中源』說的代數代表。

五、 梅沖之《勾股淺述》

《勾股淺述》為梅沖於嘉慶初年撰寫的勾股專書。[37]此書僅在「本徵君勾股舉隅而詳明之，并雜取算法統宗難題數則，附列於後，期便初學，無大精義。」[38]梅沖還提及：「西人連比例三率及中垂綫、大分、小分與理分中末綫諸說，理不異勾股，而又別成一解」[39]可見他繼承了梅文鼎的『幾何即勾股』。然而，因其《勾股淺述》成書目的在「期便初學衹明古法」，故於西法並未多加著墨，全書內容如下表：

表三：《勾股淺述》內容目錄		
類　　別	主題或內容	項目
勾股名目	簡介勾股名目	21 目
勾股析綫	說明和較之變化	
勾股析面	勾股面積	38 題
	勾股容圓	1 題
	勾股容方	3 題
	勾股測量	6 題

梅沖於《勾股淺述》一書中，唯一述及與《幾何原本》略有關聯者為「倍弦實是八勾股積，兩句股積較，比勾股和方內多一勾股較實也，故勾股和方加一較方，便是兩弦方。《幾何通解》曰較冪併和冪倍大於勾冪、股冪之併即謂此也。」其中，《幾何通解》指的是「解幾何

[35] 又譯「阿爾朱巴爾」，「阿爾熱巴拉」，即代數學 Algebra 的音譯。
[36] 參見劉鈍，〈梅瑴成〉，收入杜石然主編《中國古代科學數學家傳記》，頁 1075。
[37] 根據〈勾股淺述自序〉，《勾股淺述》，頁 1b。梅沖可能於嘉慶二年三月上旬完成此書。
[38] 引自羅士琳，《疇人傳續編》，頁 676－677。

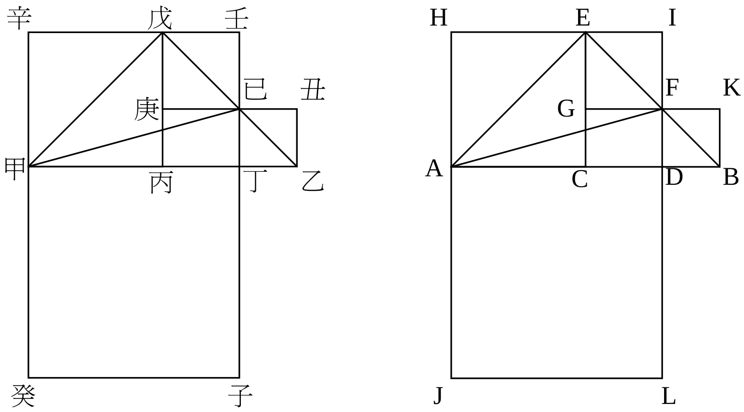
二卷第九題」,《幾何原本》的原命題如下：

如果將一線段平分之後，再任意兩分其中一線段，則任分線上兩個正方形之和，等於原線段之半為邊構成的正方形及分內線上的正方形兩者和的兩倍。

梅文鼎的證明如下：

甲丙為股，丁丙為句，丁甲為句股和，乙丁句股較；壬庚為句冪，辛丙為股冪，丑丁較冪，丁癸和冪。戊已線上方為句冪之倍，戊甲線上方為股冪之倍。

論曰：已丁較上方，與丁甲和上方併之，即已甲上方也；戊已線上方，與戊甲線上方併，亦即已甲上方也。　而戊已為句冪斜線，戊甲為股冪斜線。凡斜線上方形倍於原方，故較冪併和冪，亦倍大於句冪股冪之併也；而句股冪併之即弦。古人所以用倍弦冪也。[40]



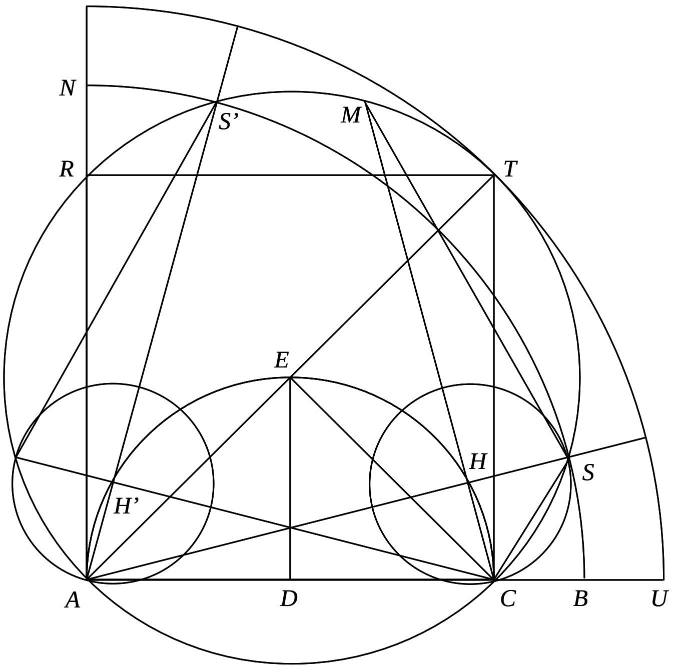
圖六

梅文鼎利用直角△AEF 與直角△ADF 共用一弦的原理得出 $\overline{FD}^2+\overline{DA}^2=\overline{EF}^2+\overline{EA}^2$，再利用 $a^2+b^2=c^2$，以及以正方形對角線爲一邊作之一正方形面積爲原正方形的 2 倍，推得 $(b-a)^2+(b+a)^2=2c^2$，即 $\overline{DB}^2+\overline{AD}^2=\overline{AE}^2+\overline{EF}^2=2(\overline{AC}^2+\overline{CD}^2)$。其中，$(b-a)^2+(b+a)^2=2c^2$，即梅沖所言：「倍弦實是八勾股積，兩句股積較，比勾股和方內多一勾股較實也，故勾股和方加一較方，便是兩弦方。」亦即，$2c^2=8(\frac{1}{2}ab)+2(b-a)^2=(b+a)^2+(\mathrm{b-a})^2$。

除了上題之外，梅沖於《勾股淺述》卷終的〈附論〉之前，另附了梅文鼎《勾股舉隅》中之〈弦與勾股和求勾股用量法圖說〉，此圖說爲《勾股舉隅》中的第 13 個問題，其圖如下：[41]

---

[39] 引自梅沖,〈例言〉,《勾股淺述》，頁 11a。
[40] 引自梅文鼎，《幾何通解》，收入郭書春編《中國科學技術典籍通彙》數學卷第四分冊，頁 448。
[41] 本圖爲筆者參考梅文鼎《勾股舉隅》中之圖形，自行繪製而成。



圖七

若設 $\overline{AB}$ 爲勾股和， $\overline{AC}$ 爲弦，則其圖解法可概述如下：[42]

(1) 作圖求解

以A爲圓心，作弧 BN 象限弦。[43]

平分 $\overline{AC}$ 於 D ，再以 D 爲圓心作半圓 AEC ，並作 $\overline{DE} \perp \overline{AC}$ 。

以 E 爲圓心， $\overline{AE}$ 爲半徑作圓，交弧 BN 於 S 點

連接 $\overline{AS}$ 交半圓 AEC 於 H 點，則 $\overline{AH}$ 和 $\overline{HC}$ 即爲勾、股。

(2) 證明

$\because \angle AHC$ 爲直徑 $\overline{AC}$ 上的圓周角

$\therefore \triangle AHC$ 爲直角△，其 $\overline{AH}$ 爲股、 $\overline{HC}$ 爲勾、 $\overline{AC}$ 爲弦。

通過各種變換利用圓弧與圓周角可得：

$\Delta ASC \cong \Delta MCS$ （ASA 全等）

因此， ΔSHC 是等腰△ $\overline{HS} = \overline{HC}$

$\therefore \overline{AS} = \overline{AH} + \overline{HC} = \overline{AB}$

故可利用 S 點來確定 H 點是正確的，即(1)之作圖求解無誤。

(3) 討論

$\because$ 半圓 AEC 中，所容勾股形以等腰 ΔAEC 爲最大，且勾股和 $\overline{AT}$ 也最大。

而其它勾股形之勾股和都小於 $\overline{AT}$ 。

$\therefore$ 當弦爲 $\overline{AC}$ 時，勾股和只能在 $\overline{AC}$ 和 $\overline{AT}$ （即 $\overline{AU}$ ）之間，

故在 $\overline{TC}$ 弧上總可得到 S ，且 S 必在 $\overline{TC}$ 弧上。

另，象限弧 BN 與圓 $ACTR$ 有兩個交點 S 、 S' ，

故 $\overline{AH'}$ 、 $\overline{H'C}$ 也是一組解。

[42] 以下之圖解法內容主要參見李迪，郭世榮，《清代著名天文數學家　梅文鼎》，頁 149。

[43] 象限弦即四分之一圓。

梅文鼎除了給出求解的作圖法，並對其作圖方法作了論述，同時還討論了可行性問題以及解的個數問題。[44]相較於徐光啓《勾股義》中「勾股求容圓」，梅文鼎在尺規作圖的概念已相當正確，也顯示梅文鼎對《幾何原本》有一定深度的了解。[45]梅沖提及他將此〈弦與勾股和求勾股用量法圖說〉兼錄於《勾股淺述》中，目的僅在觀「勾股與三角八線相通之精蘊，見西法所由出」。[46]至於梅沖其內容的了解程度，則無法確認了。

梅沖於《勾股淺述》中，雖無《幾何原本》之相關論述，但曾提及《幾何通解》且明白箇中道理，可見梅沖對於《幾何通解》應有涉獵，間接受到《幾何原本》的影響。當然，由梅沖於書末所提「三角依勾股以立，初不能外於勾股。」[47]的說法，又再一次地呼應梅文鼎『幾何即勾股』的觀念。梅沖亦提醒學習者，西法的三角法使用儀器測量，輔以八綫表取數，看似簡捷，但須儀表兼表，否則束手；而勾股隨時可用，甚爲方便，古法絕對有其不可偏廢的優勢，由此又見梅沖全繼了梅文鼎的「會通」觀念。

六、 結論

徐光啓和利瑪竇所翻譯的《幾何原本》創造了許多數學概念，如點、線、面、平面、曲線、曲面、直角、鈍角、銳角、垂線、平行線、對角線、三角形、四邊形、多邊形、圓、圓心、平邊三角形（等邊三角形）、斜方形（菱形）、相似、外切、幾何等等。這些概念一直使用到今天。相較於《幾何原本》中嚴密的論證系統，中國勾股定理一直以來，被認爲是天經地義，如同公理一般，自三世紀的劉徽、趙爽以後，就無人對其進行證明。[48]及至歐幾里得的《幾何原本》藉由中西交流合譯出版之後，正式傳入中國，《幾何原本》中嚴謹的寫作系統，開始影響了傳統勾股定理不言而喻的直觀想法。

梅文鼎爲『幾何即勾股』的論點，以『解幾何原本之根』的思維，寫成《幾何通解》，企圖以古法來解釋西方的勾股術，可見他至少對《幾何原本》的前六卷有相當的了解。此外，梅文鼎撰寫《勾股舉隅》時，內容雖以中國傳統勾股古法的內容爲主，然而，他在卷首先以兩幅「弦實兼勾實股實圖」證明勾股定理的作法，以及全書中，先進行論述、再舉例題、列解題方法並解明的寫作程序，均有受到《幾何原本》影響的跡象。[49]此外，由梅文鼎於〈弦與勾股和求勾股用量法圖說〉中的圖說，也可發現他尺規作圖概念的理解，以及他能發現問題中“第二個解”，在在都顯示梅文鼎與《幾何原本》之關係頗深。

梅文鼎的兩位後人梅瑴成與梅沖於承繼『幾何即勾股』的精神而論，兩人於所編、所撰的書籍，均有梅文鼎之遺風。其中，梅瑴成雖未有勾股相關著述，然而，負責主編《數理精蘊》的梅瑴成，堪稱梅氏家學最佳繼承人，相信他對於《幾何原本》中勾股定理的相關論述

[44] 參見李迪，郭世榮，《清代著名天文數學家》，頁 149。
[45] 參考黃清揚，〈《勾股舉隅》、《勾股通解》文本研讀內容摘要〉，收入《HPM 通訊》第五卷第八、九期合刊。
[46] 引自梅沖，《勾股淺述》，頁 12a。
[47] 引自梅沖，〈附論〉，《勾股淺述》，頁 54b。
[48] 參見梅榮照、王渝生、劉鈍，〈歐幾里得《原本》的傳入和對我國明清數學的影響〉，收入梅榮照主編《明清數學史論文集》，頁 68-69。
[49] 同上註，頁 68。

也有一定程度之理解。而梅沖《勾股淺述》一卷雖只明古法，然由其書中提及《幾何通解》「解幾何卷二第九題」與古法的弦圖精神相同，亦可知他至少明白《幾何原本》卷二第九題的命題。當然，梅沖也可能只懂《幾何通解》中的解法，畢竟梅沖對於其梅氏家學未能全繼，於算學方面的成就與理解不如前人，也是不爭的事實。[50]然而，梅沖撰寫《勾股淺述》時，所使用的一些術語，例如：點、綫、面、體、析綫、析面……等，以及先論述、再舉例並列解題方法，以及多以圖說的寫作方式，均與梅文鼎撰《勾股舉隅》類似，或許可說梅沖直接或間接受《幾何原本》的影響。

縱觀梅氏家學與《幾何原本》之關聯，以勾股術爲例，有梅文鼎於《幾何原本》前六卷的融會貫通；梅穀成承家學，主編《數理精蘊》，亦與《幾何原本》關聯不斷。到了梅沖一代，算學能力已後繼無力，甚至在所撰《勾股淺述》一書中犯了疏誤，梅沖對《幾何原本》的理解有限，但仍然受到《幾何原本》的影響。《幾何原本》對清朝以來的算學界之影響果真深遠，且至今仍持續行進中。

參考文獻

1. 李迪，郭世榮編著，《清代著名天文曆算家・梅文鼎》。
2. 李應泰等修，章授等纂，《安徽省・宣城縣志》。
3. 李儼，〈梅文鼎年譜〉，《中算史論叢》。
4. 徐世昌，〈勿庵學案〉，《清儒學案小傳》。
5. 洪萬生，〈當梅文鼎遇上幾何原本〉，《科學月刊》37(7): 504-508，2006 年。
6. 梅文鼎，《勿庵曆算書目》，板橋：藝文出版社。
7. 梅文鼎，《幾何通解》，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙》數學卷，第四分冊，鄭州：河南教育出版社。
8. 梅文鼎，《曆學駢技》，收入《梅氏叢書輯要》。
9. 梅　沖，《勾股淺述》，台北帝國大學叢書。
10. 梅榮照、王渝生、劉鈍，〈歐幾里得《原本》的傳入和對我國明清數學的影響〉，收入梅榮照主編《明清數學史論文集》。
11. 梅穀成，《梅氏叢書輯要，凡例》。
12. 梅穀成，《數理精蘊》，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙》數學卷，第三分冊，鄭州：河南教育出版社。
13. 《安徽文化史》編纂工作委員會，《安徽文化史》。
14. 黃清揚，〈中國 1368-1806 年間的勾股術發展之研究〉，台北：國立台灣師範大學數學研究所碩士論文。
15. 黃清揚，〈《勾股舉隅》、《勾股通解》文本研讀內容摘要〉，收入 HPM 通訊第五卷第八、九期合刊。
16. 廖淑芳，〈《勾股淺述》之內容分析〉，台北：國立台灣師範大學數學研究所碩士論文。
17. 劉　鈍，〈梅穀成〉，收入杜石然主編《中國古代科學數學家傳記》。
18. 劉　鈍，〈勾股舉隅、幾何通解提要〉，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙》第四分冊，鄭州：河南教育出版社。
19. 劉　鈍，〈梅穀成〉，收入杜石然主編《中國古代科學數學家傳記》。
20. 劉　鈍，〈《幾何通解》提要〉收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙》數學卷，第四分

[50] 參見廖淑芳，〈《勾股淺述》之內容分析〉。

冊，鄭州：河南教育出版社。
21. 劉　鈍，〈《幾何通解》提要〉，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙》數學卷，第四分冊，鄭州：河南教育出版社。
22. 劉洪濤，《數算大師梅文鼎與天文曆算》，瀋陽：遼寧教育出版。
23. 韓　琦，〈《數理精蘊》提要〉，收入郭書春主編《中國科學技術典籍通彙》數學卷，第三分冊，鄭州：河南教育出版社。
24. 羅士琳，《疇人傳續編》，收入楊家駱主編《疇人傳彙編》，台北：世界書局。
25. 鐘啓哲,〈日韓數學史料典籍研讀會之《數理精蘊(上)》導讀報告〉,http://math.ntnu.edu.tw/~horng/study/