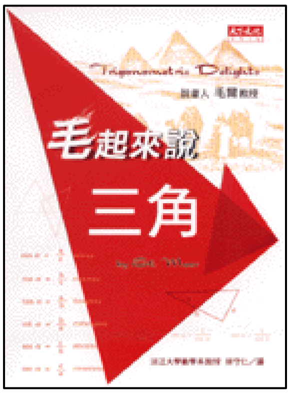
總有故事可說的三角學：《毛起來說三角》

蘇俊鴻
北一女中

書名：毛起來說三角 **(Trigonometric Delights)**
作者：**Eli Maor**
譯者：胡守仁
出版者：天下遠見出版股份有限公司
出版日期：**2000** 年 **9** 月 **30** 日
頁數：**294** 頁
定價：新台幣 **250** 元
ISBN：**957-621-732-6**(英文版 **ISBN**：**0-691-05754-0)**



一、前言

身爲一位數學教師，每當課程進行到三角函數時，繁多的三角公式頓時湧現於眼前，加上運算技巧的不足，學生常因此望之卻步，學習意願一落千丈。教材內容編寫的枯燥是個因素；相關題材的補充資料難尋是另一個問題，常令人在教學的引導上，有巧婦無米可炊之嘆。因此，當筆者由洪萬生教授處，得知 **Maor** 有本關於三角函數的著作，便經由亞馬遜網站購得此書，作者的文筆相當流利，相當具有可讀性，書中內容包羅萬象，足見作者對此一主題資料收集的功力。後來又見天下出版此書的中文版，深覺應推介給對三角函數題材有興趣的同好知曉，它會讓人重新去體會三角函數的風貌。

由本書的序言中，不難發現作者對於此書寫作的動機，呼應了筆者一開頭所提教學上遭遇的困境：

> **新數學[1]對幾何學及三角學的傷害最大。理工科課程中最關鍵的三角學，成為改革的犧者；打著嚴謹的名號，形式化的定義及冗長的邏輯推導，取代對它**

[1]此處的新數學是指 1960 年代開始，美國因應科學教育改革所提倡的數學教學方法及內容。

的實質的了解。……用將實數覆蓋到〔**-1**，**1**〕區間的函數來定義正弦和餘弦，取代用三角形邊的比率或單位圓在 x 軸和 y 軸上的投影的幾何脈胳來定義。集合的符號及語言占據所有的討論，使得一個相當簡單的課題，變成無意義的形式主義。**(Maor 1997, p.xii)**

因此，造成學生認爲「三角學是加了桂冠的幾何學，再加上計算的苦刑」[2]，**Maor** 寫作本書試圖反駁這個說法，在取材的廣度上，作者除了引入三角學歷史發展的過程外，也選擇甚多三角學中有趣的例子，或是與其他領域相關**(**如地圖繪製**)**的題材。在讀者設定上，也以高中生和大學生爲主，因此內容的深度多半利用基本的代數與三角學知識便可理解，討論的重點也侷限在平面三角學上。

此外，**Maor** 將一些相關的數學史傳記或材料補充於章節之後，共有八篇。雖然這些文章多半都是根據二手文獻改寫，但值得一提的是，頗多是「非主流」的數學家的生平與貢獻**(**如雷吉蒙塔努斯 **(Regiomontanus)** [3]**,** 棣美弗**(De Moivre)**，阿涅西**(Agnesi))**，或是在數學史的書中少見的資料**(**如棣美弗與牛頓的關係，維埃塔**(Viete)**[4]如何利用三角函數解出四十五次的方程式的正根**)**，可見 **Maor** 在寫作的選擇上有其「另類」的想法。再來就本書內容作一說明。

二、內容簡介

本書共有十五章及四個附錄[5]，就內容可分成下列幾項：**(1)**三角學發展的歷史**(**前言，第一章至第四章**)**；**(2)**三角學的應用**(**第五章及第十三章**)**；**(3)**平面三角學中有趣的題材**(**第六章至第十二章**)**；**(4)**三角學進一步的延拓**(**第十四章及第十五章**)**。由章節分量的安排可見，作者並無意讓本書成爲三角學的發展歷史的專書，倒是極力想推介一些三角學中被人遺忘，但又非常美麗易懂的公式或性質，期許讀者能重拾對三角學的興趣與熱情。

(1) 三角學的發展歷史

前言中，**Maor** 由一位埃及的古代書記阿美斯**(Ahmes)**開始談起，據信萊因德紙草書**(Rhind Papyrus)**是他根據更早的文獻所抄下。紙草書是以問題集的形式呈現，其中第 **56** 題至 **60** 題，便是有關金字塔的測量問題，由此我們可以看出埃及人已有簡單的三角學概念，能利用金字塔底邊長的一半與塔高的比率，來保持底面與邊面的夾角**(**傾斜度**)**固定。可見三角學的概念萌發甚早，也非常的實用，但是真正將它抽象成數學概念，則是希臘人的工作。接著第一章是介紹角的概念源起及單位的演變，一般認爲角的單位「度」是巴比倫人制定，爲何一個圓是 **360** 度，原因則無一定論。至於另一個度量單位「弧度」的使用，**Maor** 認爲其可能

---

[2] 此爲 Maor 引用 Edna Kramer 的說法。
[3] 雷吉蒙塔努斯是米勒(Muller)的拉丁化名字。
[4] 常被譯作韋達，本文中有關名詞筆者儘量均沿用本書中文版的翻法，避免讀者閱讀上的困擾。
[5] 中文版將參考書目與圖片來源也當成附錄，所以共六個附錄。

的原因有兩個：一來使得角的公式變得較爲簡單(如弧長，扇形面積的公式)，二來角度的大小用弧度表示，很小的角度會與它的正弦值近似，也就是 $\lim_{\theta\to 0}(\sin\theta)/\theta = 1$，因此在微積分中多以弧度爲單位。

再來第二章的重點是介紹托勒密(**Ptolemy**)的弦表，此表出現在他的著作《大成》(**Almagest**)第一冊第十章及第十一章，他將圓的弦長看成「弦所對應的圓心角的函數」，與正弦函數的定義相符，因此托勒密的弦表就是正弦函數表。事實上，托勒密的工作主要是繼承希巴爾卡斯(**Hipparchus**)的研究成果。當時希臘人的主要興趣在天文觀測，爲了因應計算的需求，才會編製弦表來求解任意的圓內接三角形。[6]值得注意的是，托勒密的弦表精確到六十進位制的第二位(即 **1/3600**)，並且給出相鄰數值間的平均增加量，方便內插計算之用。現在我們熟知的六個三角函數的由來，則是作者在第三章想交代的。例如，正弦函數的概念發生很早，印度的數學家接續托勒密的成果，完成進一步的改良工作。經由阿拉伯人再傳回歐洲時，正弦函數被寫爲 **sinus**，至於再簡寫成 **sin** 的符號則是岡特(**Gunter**)所採用。**Maor** 在此章的材料敘述的安排上，略顯得雜亂。閱讀本章時，切記函數概念和函數符號的使用或演進，是必須分開的，不然將陷入混淆的年代錯置中。此外細心的讀者會發現第三章交代第一個使用縮寫並且能保持一致性的數學家是英國數學家兼測量師諾伍德 (**Norwood, 1631**)，而第四章卻又提到十七世紀前半，有三個英國人對三角學貢獻良多，其中奧特雷德 (**Oughtred, 1657**)首先有系統地使用縮寫符號代表三角函數，仔細比較文中關於兩人所用符號的說明差異不大，爲何令人覺得說法不一，原因何在？**Maor** 並未說明。經筆者查閱發現：諾伍德首先有系統地的使用縮寫符號，但奧特雷德是當時英國最有影響力的數學書作者，像牛頓、[7]華理斯 (**John Wallis**)[8] 都是他的讀者，因此他的重要性不言而喻。[9]

至於第四章則介紹三角學的解析化發展，**Maor** 認爲埃維塔最早將代數方法運用在三角學中，爲三角學滲入解析的特質；加上解析幾何的出現，更助長代數的發展。另一個重要因素則是數學所描述的對象有了改變，古典的三角學主要是應用在天體上，因此首重球面三角學；而十七世紀開始，重心轉移到力學的應用上，例如鐘擺及彈簧的振動問題，而這些描述週期現象的問題，使得三角函數有更大揮灑的空間，也讓三角學由函數表的編纂，變成各三角函數間性質的探討。加上寇茨 (**Cotes**)、棣美弗及歐拉 (**Euler**) 等人的研究，將複數融入三角學之中，使三角學與分析學相結合。因此三角學與三角形漸行漸遠，到了十八世紀，開始將三角函數定義成純數字，而非三角形的三邊長的比值。[10]更由於「振動弦」問題，導出解的兩種形式爭論，最後在傅立葉 (**Fourier**) 証明了「只要函數在某個

[6] 希臘人主要關心的是球面三角形，至於平面三角學的發展，一直要到十六世紀。
[7] 見 Victor J. Katz, A History of Mathematics, p. 461.
[8] 見 Howard Eves, An Introduction to the History of Mathematics, pp.251-255
[9] 這提供一個數學社會史的例子。
[10] 德國的數學家凱斯特奈 (Kastner) 是第一位將三角函數定義成純數字，而非三角形的三邊長的比值。

區間中被視爲週期函數時，就可以被表示成正餘弦函數的級數和」得到解決，也使得三角學成爲十九世紀分析學上研究週期函數的有力工具。

(2) 三角學的應用

Maor 第五章便回顧人類最早使用三角學的歷史-「量天度地」，由阿里斯塔克斯 **(Aristarchus)** 測量太陽、地球與月球彼此間的距離的方法談起，到希巴爾卡斯改良測量方式，及埃拉托斯特尼 **(Eratosthenes)** 估計地球的圓周長，重現希臘人對量度天體的努力。這種測量概念後來逐漸演變成測地學，其測量方法被稱爲「三角分割」，藉由地表的測量決定地球的形狀。由於地球形狀的議題牽涉到牛頓的重力理論與笛卡兒的渦動理論的論辨，並且引出英國與法國的國家尊嚴之爭。使得十八世紀，由法國開始引起一股測地的風潮，蔓延到整個歐陸。可見外在因素是會影響科學活動的進行。

接著十三章則是轉向地圖學中的所使用的三角學，**Maor** 簡介了幾種製圖所用的投影方法以及其中所使用的三角學知識，如圓柱投影、球極投影等。但不論是何種投影法，都無法符合當時航海的需求，這個難題最後由麥卡托 **(Mercator)** 所發明的麥卡托投影法所解決。但麥卡托並未清楚交代他的製圖原理，因此在當時他的製圖法無法得到認同，後來由萊特 **(Wright)** 利用數值積分的方法，反覆求取每一分弧度所加上的正割值，列出經度 **0**°到 **75**°的結果，驗証麥卡托的原理，其製圖法才得以推廣。

(3) 平面三角學中有趣的題材

筆者覺得 **Maor** 在本書中最大的貢獻便是此一部份素材的搜集，對於教學上頗有幫助。譬如第六章，由「圓中一弧所對的圓心角等於圓周角的兩倍」的定理，推而証明正弦定理及倍角定理，給我們一個不同於現行教材利用面積相等的証明方法。這樣將任意三角形看成圓的內接三角形的方式，是比較符合希臘人的看法。把正弦定理看成與圓有關，能給我們更多的幾何意義上連結。再來 **Maor** 透過托勒密定理[11]，給出畢氏定理的另一種証明；也証明出正弦函數的和角公式。讓我們進一步了解托勒密定理在三角學上的重要性，並非是我們習題中一個不起眼的問題罷了。第七章的內容，對我們是比較陌生的，作者介紹外擺線與內擺線的參數方程式及性質。

第八章主要介紹一個三角級數和公式

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\cdots+\sin n\alpha=\frac{\sin\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

[11] 已現代的符號來寫，就是圓內接四邊形 ABCD 中，對角線長乘積等於兩對邊長乘積的和，即 AC．BD＝AB．CD+ BC．DA。

有趣的是，**Maor** 由高斯求級數 **1** 加到 **100** 的小故事談起，引入相仿高斯的想法，推導此一級數公式的想法，最後再利用幾何作圖，讓我們了解這個級數公式的幾何意義。接著第九章是有關無窮等比級數的論述，最精彩的部份是「任何一個收斂的無窮等比級數，均可用直尺和圓規以幾何方法作出，並可由圖形求和」，筆者尤其推薦此章，**Maor** 試圖想告訴讀者對三角學的理解，不應只是繁複的三角函數計算的代數面向，它有著極爲美麗可見的幾何面向**(**此想法散見各章**)**。其基本想法是**-1** 到 **1** 之間的任意實數，均可與 **0**°到 **180**°間的餘弦函數一一對應，因此級數和$1+r+r^2+r^3+\cdots+r^n+\cdots(-1<r<1)$可看成$1+\cos\alpha+\cos^2\alpha+\cos^3\alpha+\cdots+\cos^n\alpha+\cdots$，如此一來，我們就能由幾何作圖來求和。**(**下圖爲銳角的情形**)**

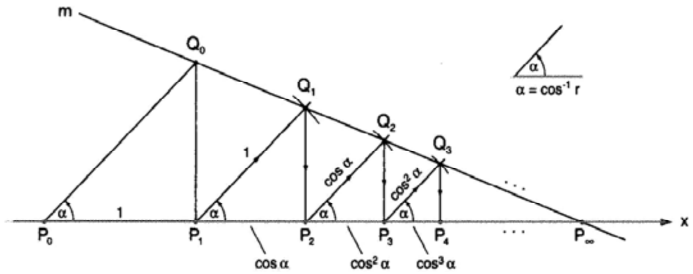


圖55 $S=1+\cos\alpha+\cos^2\alpha+\cdots$的幾何作圖 (見中文版 158 頁)

第十章與第十一章，是有關函數$\frac{\sin x}{x}$的種種，除了$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$外，還有一些相關性質與應用，例如$\frac{\sin x}{x}$是某種三維空間的世界投影到二維空間中的比例函數；或是歐拉曾發現這個無窮乘積的式子$\frac{\sin x}{x}=\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}\cdots$，**Maor** 當然也說明此乘積的幾何証明和幾何意義。第十二章的內容，**Maor** 則是留給函數$\tan x$，雖然在三角學的發展上，一直讓人覺得正餘弦函數的重要性遠超過正切和餘切函數。事實上正切函數的概念起源很早，在投影問題中便已出現。像維埃塔就曾提出正切定理$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\tan(\alpha+\beta)/2}{\tan(\alpha-\beta)/2}$，雖然現代的課本已經不提，但在沒有計算機的輔助求解三角形時，這定理可比餘弦定理更容易利用對數來運算。此外，$\tan n\alpha$的展開式與二項式定理關係密切；還有經由$\tan x$的部份分式，**Maor** 重新驗証許多歷史上與π有關的著名級數公式，這些都是在教材中甚難得知的部份。

(4) 三角學進一步的延拓

Maor 深覺三角學的歷史中，「有三項發展特別顯著，基本上改變了整個課題：托勒密的弦表，使得三角學成爲實用的計算科學；棣美弗定理及歐拉的公式$e^{ix}=\cos x+i\sin x$，使得三角學與代數和分析學相融合；再來就是傅立葉定理。」**(**見 **Maor 1997, p198** 或中文版 **251** 頁**)**不難了解 **Maor** 撰寫第十四章與第十五章的用意。在第十四章中，透過歐拉的公式，我們能找到$\cos iy$ **(** $\cosh y$ 雙曲餘弦**)**與$\sin iy$ ($\sinh y$ 雙曲正弦**)**的關係式，並且熟悉的三角公式，也能找到相對應的雙曲

公式。因此，我們能將三角學推廣到複數平面上。最後一章傅立葉定理，則在簡介傅立葉的生平及說明傅立葉定理的梗概與應用，畫下句點。雖然筆者能體會作者為求完整性，而安排了最後兩章，但由於讀者設定及題材難度的緣故，只能點到為止，內容相當簡略，略顯得美中不足。有興趣者不妨參閱相關數學書籍。

三、結論

綜觀全書作者在題材選擇和舖陳上，仍然遵循著三角學發展的歷史架構。雖然在三角學發展的歷史上，材料的剪裁稍顯零亂。省去球面三角學的發展與相關題材的作法，則是讓人深覺可惜。但在作者的生花妙筆下，書中的各種主題相當平易近人。但筆者更希望大家能體會 **Maor** 想扭轉讀者對於三角學只是由一堆三角公式所堆砌出的刻板印象的用心。他在每一章節儘可能將三角學與幾何學緊緊相扣，為三角公式找到幾何解釋與論証。這樣的努力是值得我們喝采！尤其在教學工作上，筆者深刻地體會，如何讓學生能「看見」一個數學式子的意義是非常困難的。若能藉由幾何圖解，往往比較能讓學生容易感受。**Maor** 的現身說法，無疑地開啓一條努力的道路。我們能夠在古代文本獲得許多因著學科知識本身或外在因素的演進，而被遺忘的舊有風貌，若能適當地賦予意義重新詮釋，對於教學工作的啓發有著莫大的助益！

最後，筆者覺得必須為譯者的用心說上幾句，本書的中文版相當流暢，也能扣住作者的本意，除了一些數學家的人名或著作的譯名與慣用的稱呼有些出入。值得一提，譯者對於人名翻譯都會附注原文，這是相當棒的作法。如果數學著作也能附上原文，那就更加完善。有幾處明顯錯誤藉此提出，**107** 頁的 **Stirling** 公式應為 $n! \approx \sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}$，及 **175** 頁表 **4** 下方的一行文字應為“由北極到赤道的距離恰為赤道圓周長〔書中誤譯為半徑〕的四分之一” 。至於令人詬病專業名詞誤譯的問題並未出現。這應該與譯者本身的數學專業有關，或許能提供讀者在購買科普翻譯書籍時一個參考的指標。

優秀數學科普作品的指標 （暫訂）

指標以★★★★★為最高

1. 知識的實質內容 **(Intellectual substance of knowledge)**

- **(1)** 認識論面向 **(Epistemological aspect)**：★★★★
- **(2)** 歷史或演化面向 **(Historical or evolutionary aspect)**：★★★★
- **(3)** 哲學面向 **(Philosophical aspect)**：不適用
- **(4)** 教育改革面向 **(Education reform aspect)**：★★★

2. 形式或表達 **(Form or representation)**

- **(1)** 創新手法 **(Innovative approach: new story on old stuffs)**：★★★★

(2) 數學知識的洞察力 (Insight into mathematical knowledge: inspiring and revealing)：★★★★

(3) 忠實可靠的參考文獻 (Integrity with references)：★★★★

(4) 敘事的趣味性、可及性與一貫性 (Narrative in an interesting, accessible and coherent way)：★★★★

3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form)：針對下列三個年齡層閱聽大眾，考量（知識活動）內容與形式（包裝）的不同平衡點。

(1) 兒童層次 (for kids) ★★

(2) 青少年層次 (for adolescence) ★★★★

(3) 一般社會大眾 (for general public) ★★★

4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage)：

造成十七世紀前半解析三角學地位高升的原因還有一個，那就是：數學對物質世界的描述日益重要。古典三角學的發明者主要是考慮應用在有關天空的研究(因此首重球面三角學，其次才是平面三角學)，而新的世代則是立足於日常生活的力學世界。

伽利略發現，任何運動都可以分解成兩個相互垂直、且能獨立處理的分量，此項發現立刻讓三角學成為運動研究中不可或缺的一環。**(p. 68)**

從另一個層次來看，樂器製造技巧的日益精巧、複雜化，不管是木管、銅管、還是鍵盤樂器和管風琴，都激勵科學家去研究弦、薄膜、鈴、風管這類發聲體的振動現象。

所有的發展都強調了三角學在描述週期現象時扮演的角色，其結果就是：研究重心從計算三角學(函數表的編纂)，轉期到三角函數之間的關係—也就是解析三角學的本質。**(p. 69)**