

世界第一簡單 - 線性代數

黃俊瑋

台灣師大數學系研究生

書名：世界第一簡單 - 線性代數

作者：高橋信

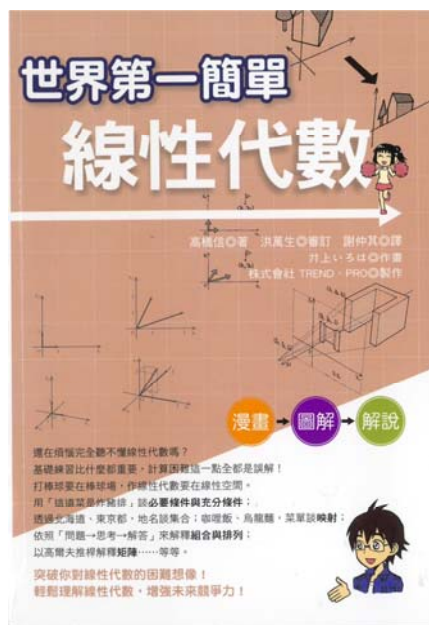
譯者：謝仲其

出版社：世茂出版有限公司

出版年：2010

頁數：284

國際書碼：ISBN 978-9866363-40-5



一、內容簡介

十年前的某個午后，數學系的第一堂課線性代數課，老師一進教室便在黑板上寫下了向量空間的所有公設，緊接著，令人目不暇給地表演了如何檢查各式各樣具體或者抽象的例子是否為向量空間，留下台下滿是一頭霧水的「觀眾」。若再加上當天午餐前的第一堂微積分課，關於極限的 δ - ϵ 定義，不啻是對這群志得意滿於推甄或大考，而不知天高地厚的數學系新生，一記當頭棒喝！

雖然一般多數理工科系的教學現場，未必循此抽象、一般化而具結構性的進路來引發學生的「動機」，然而，就學科的內容來探討，線性代數是一門延伸於高中解析幾何，特別是向量單元的課程，同時，它也連接著多數理工科系未來專業知識的必修科目，其大量依賴中學數學知識為基礎，並且兼具了理論結構與跨學門間之應用與連結。就其整體知識的實質內涵，與抽象的理論建構與發展而言，一般學生勢必難以精曉。不過，從教育的面向視之，線性代數可謂處於理工科系知識體系之樞紐中心地位，深深影響了未來學習與研究，因此，如何完善地讓學生們掌握，便是教師們的重要課題。基於此，本書作者誇下海口地定下書名「世界第一簡單 - 線性代數」，他如何把線性代數變簡單，又不失原味，恐怕是無法逃避的挑戰。

誠如作者前言所述：「本書籍的意圖是讓讀者在短時間內對線性代數有一個整體的鳥瞰圖像。」而其預設的讀者群亦是以初學者、學習困難者或是感到好奇的社會人士，以及考慮就讀理工科系的高中生為主要對象，因此，「天下第一簡單」便是本書吸引讀者目光與興趣的重要廣告詞。然而，線性代數有其固有的難度，作者又如何把變簡單呢？漫畫和貼近學生生活的劇情，便是作者用以拉近與讀者之間距離的主要媒介。故事中的主人翁百合野陰錯陽差地成為線性代數家庭教師，而本書便以他的教學歷程作為進行的主軸，當然，各章節便依循其主角教學過程中所設計的教學進度與結構來呈現：

- 第 1 章 什麼是線性代數
- 第 2 章 基礎知識
- 第 3 章 矩陣
- 第 4 章 矩陣(續)
- 第 5 章 向量
- 第 6 章 向量(續)
- 第 7 章 線性映射
- 第 8 章 固有值與固有向量
- 附錄 練習題/內積/外積/行列式的特性

主角從線性代數的實用觀點切入，引發女主角一之瀨美紗或讀者們的學習動機與興趣，再引出數之分類，命題、充分必要條件等簡單的邏輯概念，以及集合、映射、組合與排列等相關概念，作為學習線性代數的基礎知識。接著，在第三至第六章之中，他依序介紹了二項線性代數重要的工具：矩陣與向量。首先，提到了矩陣之加、減、純量倍數（係數積）、乘等運算性質，並介紹了零矩陣、上下三角矩陣、對稱矩陣、對角矩陣、單位矩陣乃至於求反矩陣的方法。到了第五章，向量的概念登場，接著是向量之加、減、純量倍數（係數積）等基本運算性質。不過，到這個部份，除了以餘因子法求反矩陣之外，其它仍屬於目前台灣高中數學高二、高三的課程範疇。

從第六章的線性獨立、基底、維度開始，才正式談到一般大學的線性代數教材。第七章的前半部份，主要關注線性映射，特別是放大、平移、旋轉、透視投影等特殊映射的矩陣表示和相關幾何意義，後半部份則把重心放在維度定理和秩的計算。第八章則是本書的重頭戲，也是線性代數教科書之中的重要單元：固有值與固有向量。在本章之中，作者介紹了如何求固有值與固有向量，以及將方陣對角化的程序性方法，並用以簡化求 n 階方陣的任意正整數次方的過程。最後，再簡單地提及當某一方陣之固有方程式的根有重根時，則該方陣未必能順利地對角化。不過，作者並未再進一步引入 **Jordan form** 與 **rational form** 之概念與處理程序。

上述各章的表達呈現手法，主要透過漫畫中的主角百合野的教學過程，來提出數學知識，然後配合坐標化的相關圖形，進行圖解，接著再透過文字、語言來進行解說與闡述。除了百合野講授過程中所學的相關例子，與講演過程的數學式之外，爲了故事的流暢性，作者並不特別給予練習題，而是將一些具計算性的練習題放於附錄之中，同時，當故事之中出現較具專業性或較抽象的知識與公式時，通常爲了使主角的教學過程能順利進行，他採取的方式，是跳脫出漫畫的故事情境，改以透過方框總結或者整理並呈現在另外的頁面之中。至於內積、外積與行列式相關性質的部份，作者則移至附錄之中，以增進閱讀之流暢性。

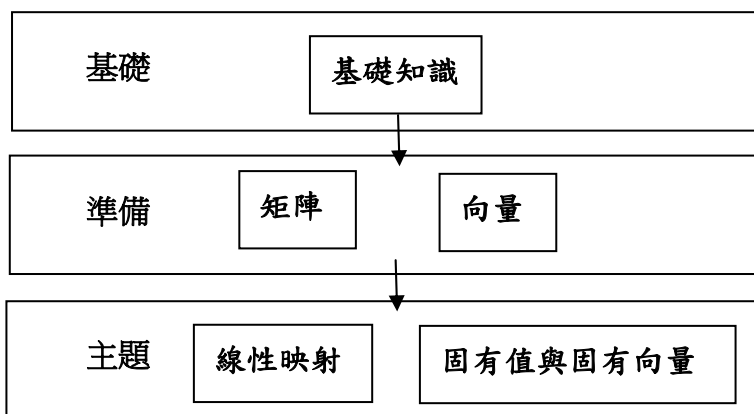
最後，我們暫時撇開數學的部份，故事的場景發生在一所大學的校園，主角百合野因爲某些原因，期望能加入空手道社而改變自己，卻被社長一之瀨拒於門外，然而，無意間社長發現百合野爲某數學參考書的作者，而以教社長妹妹數學爲條件，讓他入社參與練習。故事就百合野與美紗兩人的教學互動與對話中展開。也一直到故事的最後，才終於交代主角學習空手道的原因，原來是希望自己不再軟弱而能更加堅強，保護自己喜歡的人，雖然最終仍無力抵抗壞人，但其勇氣卻也感動了花道大。故事也在成爲社長的數學家教老師的一片歡樂中結束。

二、評論

就一般的書籍讀物而言，漫畫與教科書可說是處於兩個極端的對比，特別又是一般人眼中最爲抽象、艱深的數學知識。然而，「天下第一簡單」系列的作者，大膽地利用了成人與小孩都會喜歡並且感興趣的文類——漫畫，輔以貼近學生生活的劇情作爲主軸，結合了他希望讀者學習、了解的數學知識。這無疑是拉近數學知識與讀者間的距離，並爲害怕數學的讀者們打上一劑強心針。

爲了滿足書名所稱之「天下第一簡單」—線性代數，作者不僅從外在的形式：漫畫，來包裝抽象困難的數學知識，使之更能吸引讀者目光，符合多數讀者們的胃口，即使在內在形式與數學的實質內容方面，作者勢必也得多費功夫與巧思，以更易學易懂的方式來呈現相關的數學知識，力求降低讀者閱讀上的認知負荷，展現出線性代數簡單可讀性與具普及性的一面，企圖拉回望數興嘆的讀者。

首先，作者小心地挑選其所欲呈現的知識內容，並安排呈現的方式與順序。就整體知識架構來看，第二章先介紹相關基礎知識，然而，這些知識爲所有數學科目的基礎，並非單只是作爲學習線性代數所需。從上述基礎出發，透過矩陣與向量兩樣重要工具，以攻克「線性映射」和「固有值與固有向量」這兩座山爲主要目標：



矩陣與向量的部份，占據了本書 100 頁的篇幅，主要以基本運算性質之說明與介紹為主，並不涉及太難或過於抽象的定理與證明。在多數場合中，作者也僅給予數字之例子，來「驗證」相關性質與運算法則。待讀者掌握了這兩項基本工具之後，便在第七與第八章中，朝主目標前進。至此，方脫離高中數學知識的範圍，真正開始嗅到線性代數的味道與內涵。至於最後的附錄部份，除了附錄 1 - 4 「數學家眼中所看到的內積」和單範正交基底 (orthonormal basis) 的概念之外，其它有關於內積與外積的運算和性質，以及行列式的性質部份，都屬於台灣國中課程的內容之中，這部份對於一般具高中數學程度的學生而言，亦非陌生的題材。

在數學知識的呈現上，本書主要以數學概念的傳遞和解說為主，同時，搭配作者給予的一些巧妙比喻與相關實例，來幫助讀者快速地學習、了解或說記得線性代數的重要基本知識，但書中幾乎不給出定理的證明與推演，著重於知識的“Know How”層面，對於有心“Know (the reason) Why”的讀者，恐怕難以滿足其好奇心與求知慾。又例如在本書第 22 頁之中，雖然作者提到了數學家眼中的線性代數，即抽象的向量空間公理，然而，作者也明確希望讀者讀過就忘，以免造成學習上的負擔與恐懼。因此，本書雖適於引領初學者或數學程度不佳的學生，初步地窺探線性代數的樣貌，但對於必須將線性代數當作基礎學習與研究工具的多數理工科系學生而言，數學知識的內容深度與廣度顯然不足。

如上所述，作者是以單向度的知識傳遞為主要進路，讀者較難以從閱讀過程中，得到重要啟發或反思。此外，多數場合之中，雖然作者提出了例子來幫助讀者學習，並從中抽象出數學概念，然而，為了易懂與普及性，也省去了所有的證明。因此，就本書中對於數學知識的核證而言，多採用歸納的方式，透過對例子的觀察，來推出一般性公式或對公式進行驗證。不過，以少數特例即推出性質與定理的方式，雖是一種引導發現與猜測的方式，但也容易使讀者誤解或忽略了數學證明之意義與重要性。例如第 5.1 節之中，作者舉了四個例子之後，然後在第 203 頁作了結論：

從以上四個例子我們可以得出下列關係：

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \text{rank} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \neq n$$

然而，事實上，單從四個數字的例子，數學家並不能武斷地確保該性質的正確性，或得到該關係式成立的結論。這或許是因為作者並非數學系出身，其工科背景下，強調的是知識的應用面向與“Know how”面向，因而忽略了證明對於數學知識之意義與之於數學的內涵。

除此之外，作者在第六章利用高爾夫球來解釋向量與其加法運算，是創新的例子，而第二章裡利用「如果這道菜是炸豬排，則這道菜有用到豬肉」來解充分必要條件，亦是生活化而直觀易懂的方法，值得一般教師融入於向量單元的教學中。又，第二章介紹映射，或第七章之中以實際圖形的變化來處理線性映射的例子，都值得教師學習仿效，納入教學百寶箱之中。此外，在第四章中，作者將求反矩陣化約為處理求解一元二次聯立方程式，同時，在求解的過程中，作者將「普通的解法（加減消去法）」、「將普通的解法以矩陣表式」、「掃除法（矩陣的列運算法）」等之每一步驟並列，以利讀者進行對比，的確有助於學習者一目瞭然，觀察出帶未知數的加減消去法與矩陣列運算之間的關係，以及如何進行過渡和轉換。同時，作者認為利用餘因子法求高階反矩陣的過程過於複雜，因此，建議以掃除法為主要方法。他在 99 頁提到二階方陣求反矩陣的公式後，接著提出「這個公式只在二次方陣中存在」的說法，然而，事實上，此一二階公式即為一般求 n 階方陣之餘因子法。作者未發現其中的連結。而求行列式值時，亦未介紹易於推廣的「降階法」，而是介紹三階行列式之公式法 (Sarus' rule)，並推廣至四階的情況，主要是利用畫表來求解四階行列式值。然而，筆者認為此法用於三階情況雖易學易記，若欲繼續推廣，恐怕過於繁雜而不易，且實際應用於三階之外的求行列式值時，亦不如降階法來得有效而方便。

再者，筆者特別就本書關於基底之定義部份進行探討，作者提到了二種定義基底的方式。首先，在 149 頁與 153 頁中提出：

對於屬於 R^m 中任意元素的向量 v 來說， $v = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_n a_n$ 都只存在一組解時，我們稱 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 為基底。(筆者為了方便將報式法簡化，有興趣者請參考本書)

另外，在 153 頁提到：

基底就是「能夠表示 R^m 當中任何元素所需要的最少數目之向量，由這些向量所構成的集合」。

就此兩個定義來看，作者在本書中是以「將所有 R^m 中的向量表示成線性組合具唯一性」，以及「最小生成集」兩種方式，來作為基底的定義。有別於一般線性代數教科書中，利用「線性獨立」加上「生成集」作為定義有限維向量空間之基底的條件。雖然作者未加以解釋或說明，但我們仍可證明這些定義之間的等價性，例如：第一種定義與一般教科書的定義來看。從 $v = c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots + c_na_n$ 存在解，即隱含了 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 是該向量空間之生成集的條件，當 v 為零向量時的特例，可導出 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 之線性獨立性。反之，由 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 為線性獨立集且為該向量空間之生成集，亦可簡單地導出解的存在唯一性。此外，作者亦洞察了線性獨立與基底的差異：基底則是對所有向量之線性組合表示的係數具唯一性，而線性獨立是僅針對零向量之線性組合表示的係數具唯一性。

就譯者之翻譯品質上，沒有太大的問題，文字亦通順易讀，惟排列與組合之符號 ${}_nP_m$ 和 ${}_nC_m$ 與國內中學、大學之教科書之一般用法不同落，而封面中提到「以高爾夫球推桿解釋矩陣··等等」，對照本書內容應為「以高爾夫球推桿解釋向量··等等」。至於附錄中的習題，必需用到向量之內積與外積的計算性質，因此，若將其順序安排在內積與外積之後較為適當。

綜觀本書，作者的野心似乎不大，除了力求教材可能的簡單化之外，就數學知識，除了介紹線性代數在許多領域的應用，以及作為「理科人士」的重要基礎之外，未再進一步與其它知識面向作一連結，僅在第一章談到其對於「考試常考題目與線性代數重要單元」之想法：

線性代數中對學問研究很重要的單元，與考試常出現的單元竟然不一樣。

人生有四條道路：

- (1) 線性代數考試很高，也懂得線性映射
- (2) 線性代數考試很高，但不懂線性映射
- (3) 線性代數考試不好，但懂得線性映射
- (4) 線性代數考試不好，也不懂線性映射

大學生們無論考慮就業或繼續念書，(1)和(2)都是有成就的出路。筆者也贊同(1)是最好的結果··(2)是「見樹不見林」，無論畢業與否，都只體留下「線性代數，真是個莫名其妙的學問，我完全想不起來我學了啥」··。比起(2)的類型，筆者認為(3)的人更能夠獲得幸福的人生。

上述文字，說明了筆者眼中的「線性映射」，是線性代數中極為重要的核心概念，然而，這也反映作者在教育現場上所觀察到的現象，評量內容（考試）未能與學科之重要單元相一致的情況，而且學生也未能有意義地學習。所有這些，也是頗值得教師或教育研究者進一步省思的議題。作者也進一步對比了「線性代數考試很高，但不懂線性映射」與「線性代數考試不好，但懂得線性映射」的兩類學生。第一類學生爲了考試而學習，爲考試而讀書，然而，即使在考試中無往不利，得到高分的學生，卻未必真正懂得一門學問的重要內涵與核心知識概念，這類學生普遍存在於一般中學或大學之中，或許有幸拿到優秀的成績，畢了業，但「見樹不見林」的結果，畢業後往往落得不帶走一片「知識」的結果，反而不如那些雖然考試成績普通，但確實了解重要的知識內容與知識結構的學生，才能把所學帶入於未來的研究、工作或人生之中。

此外，本書並未提到到線性代數之發展史與相關重要數學家，也未就社會、文化與哲學等相關面向進行探討，單純以百合野對一之瀨美紗和讀者進行線性代數「知識」的傳遞爲主要目標。由於本書標榜「簡單」，並以不熟悉數學的主角一之瀨美紗作爲主要教學對象，因此，對於整體知識內容的難度與廣度，自然無法太過苛求。除了線性獨立與基底、固有值與固有向量，以及書中提到「數學家眼中的數學（向量內空間、內積等）」部份，本書其它內容大多屬於高中教材範疇，也因此，對於高中數學中等與中上數學程度的學生而言，本書可收複習舊經驗並伸延新知識之效。針對一般有興趣的社會大眾來說，亦可循著漫畫劇情的脈與架構，一窺線性代數之究竟才是。

優秀數學科普作品的指標

一、評價方式

指標以五顆星☆☆☆☆☆為最高品質。

1. 知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)

- (1) 認識論面向 (Epistemological aspect) : ☆
- (2) 方法論面向 (Methodological aspect) : ☆☆
- (3) 歷史或演化面向 (Historical or evolutionary aspect) : ☆
- (4) 哲學面向 (Philosophical aspect) : ☆
- (5) 教育改革面向 (Education reform aspect) : ☆☆
- (6) 與自然科學、人文社會乃至生活經驗的連結 (Connections with natural science, social sciences and humanities as well as daily experiences) : ☆☆☆

2. 形式或表達 (Form or representation)

- (1) 創新手法 (Innovative approach: new story on old stuffs) : ☆☆☆☆☆

- (2) 數學知識的洞察力 (或洞識) (Insight into mathematical knowledge: inspiring and revealing) : ☆☆
- (3) 歷史事實的洞察力 (或洞識) (Historical insight or a sense of history) : ☆
- (4) 異文化的啟蒙意義 (Enlightening in cultural mathematics) ☆
- (5) 忠實可靠的參考文獻 (Integrity with references) : ☆☆☆☆
- (6) 敘事的趣味性、可及性與一貫性 (Narrative in an interesting, accessible and coherent way) : ☆☆☆☆☆
- (7) 中譯本的品質 (若需要) (Quality of Chinese translation version, if needed) ☆☆☆☆
3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form)
- (1) 兒童層次 : ☆
- (2) 青少年層次 : ☆☆☆☆☆
- (3) 一般社會大眾 : ☆☆☆☆☆

4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage) :

· · ·線性代數中對學問研究很重要的單元，與考試常出現的單元竟然不一樣· · ·

人生有四條道路：

- (1) 線性代數考試很高，也懂得線性映射
- (2) 線性代數考試很高，但不懂線性映射
- (3) 線性代數考試不好，但懂得線性映射
- (4) 線性代數考試不好，也不懂線性映射

· · · · ·大學生們無論考慮就業或繼續念書，(1)和(2)都是有成就的出路。· · ·(1)是最好的結果· · ·(2)是「見樹不見林」，無論畢業與否，都只體留下「線性代數，真是個莫名其妙的學問，我完全想不起來我學了啥」· · ·。比起(2)的類型，筆者認為(3)的人更能夠獲得幸福的人生。—第一章 什麼是線性代數

利用「如果這道菜是炸豬排，則這道菜有用到豬肉」來解充分必要條件。
—第二章 基礎知識

利用高爾夫球推桿來解釋向量。—第五章 向量