

數學與敘事在教育上的應用：以通識教育和 HPM 為例

洪萬生

台灣師範大學數學系

林芳玫

台灣師範大學台灣文化、語言與文學研究所

一、前言

除了科普作家或關注數學普及的數學家之外，數學知識活動的敘事面向也逐漸吸引教育學者的注意。在本文中，我們打算針對數學與敘事 (mathematics and narrative) 之結合如何可以應用到通識教育，以及它與數學史與數學教學之關連 (簡稱 HPM) 的宗旨之呼應，¹進行一個初步的研究。

有關數學與敘事如何被運用以創作和評論數學小說 (mathematical fiction)，我們已經另文討論。²由於這些小說都具有數學知識普及之功能，同時，它們也蠻適合充當與數學核心課程有關的通識教育課程之參考，乃至於中小學師生的科普讀物，³因此，我們希望歸納數學與敘事的幾個面向，以使用以刻畫它們在通識教育與 HPM 方面的應用之價值與意義。

有關大學通識教育之理念及其實踐，可以說是眾說紛紜，各擅勝場，此處顯然不需要贅述。我們在此僅以本校的核心通識領域「數學與科學思維」為論述脈絡，反思其中一門主要的課程「數學活動與思維」，如何與本文若干結論進行對話，從而提供一點實踐方面的借鑑。至於有關 HPM 觸及「數學和敘事」這一主題的相關研究，我們也打算略作論述，希望引出更深刻的研究成果。

基於上述這些考量，本文除了引述湯瑪斯 (R. S. D. Thomas) 與 Tony Brown 之類比數學與敘事 (第二節)，將藉以簡要比較數學小說與歷史小說 (第三節)，以及針對科普書寫的數學家傳記版本，進行初步的反思 (第四節)。最後，再依序探討數學與敘事在通識教育以及 HPM 方面的應用 (第五、六節)。有關本文論述與通識教育之關連，我們在結論 (第七節) 部份內容中，將以前述「數學與科學思維」領域的目標與內涵為參考點，再對照「數學活動與思維」課程的實施情況，貢獻一得之愚，期待各界專家學者的批評與指教。

二、數學與敘事

¹ 所謂 HPM 原指數學史與數學教學之關連的國際研究群 (International Study Group on Relations between History and Pedagogy of Mathematics)，後來則引伸為一個研究學門。請參考 Fauvel & van Maanen (Eds.) (2000)。

² 參考林芳玫和洪萬生，〈數學小說初探：以結構主義敘事分析比較兩本小說〉。

³ 譬如小川洋子的《博士熱愛的算式》就極受中小學數學教師的歡迎，其中所納入之數學及其認知策略，也頗受數學家及數學教師之認同與肯定。參考單維彰 (2008)、蘇惠玉 (2006)。

湯瑪斯在他的〈數學與敘事〉(Mathematics and Narrative) 中，⁴對比數學與敘事，指出兩者之間常被忽略的相似性。現在，通過定理與證明 vs. 小說與歷史敘事 (fictional and historical narrative) 之比較，這一相似性乃得以凸顯。

當我們進行數學證明時，通常首先設定 (postulate) 某些客體或物件 (object)，以及它們之間的關係，⁵這可以類比如下：當我們說故事時，是從一些已知角色開始。數學理論的發展主要透過邏輯演繹，衍伸數學物件之間的關係。另一方面，(小說) 故事的發展則主要由於外在原因與人物的意圖。不過，故事與數學中的想像 (imagination) 與演繹 (deduction) 也截然不同：「在數學中，吾人想像之目的在於瞭解結論為何被如此蘊涵，而在故事中，吾人則是局部地演繹推論，以便知道何者用以想像以及故事如何開展。」儘管如此，湯瑪斯還是指出：數學言說 (mathematical discourse) 的動人之處，乃是在於被論及的關係之真實關連 (actually relate)：它們並非抽象的，譬如歐幾里得未曾說及點的共線性是一種抽象概念，而只是探討某些點是否共線 (collinear)。類似地，莎士比亞從未論說何謂嫉妒，他只是將一些人物布置在那個情境之中，以便吸引我們的注意。

如此看來，敘事處理的是最終特例 (ultimately special cases)，數學家則主要關注一般性的結論。不過，數學家還是對他們據以發現模式 (pattern，或一般式) 的特例感興趣。⁶文學理論與研究，如同數學思維一樣，都把特例看成模式的一種彰顯，因此，文學理論從許多特定的故事中提煉出共同的模式。我們可以接受相同結局的故事有不同的情節發展過程，另一方面，在數學中，我們也歡迎針對同一命題的不同證明。

最後，回到數學 vs. 敘事的應用性與真實性。湯瑪斯注意到諸如數學物件與數學定理，都能如同故事般地被應用，這是因為數學物件及其彼此關係，正如同故事中的虛構人物或角色 (character) 一樣，都是被設定的，但是，進一步推演或發展出來的有意義關係，卻具有普適性的應用價值。而數學的事實 (亦即有效的推論) 也類比了故事之中的事實。「好的」數學概念，可用之證明某些事，最好的故事則具有不同方式的啟發力量。

以上是數學家湯瑪斯的見解之摘要。接著，我們打算介紹數學教育家 Tony Brown 從後結構主義 (post-structuralism) 觀點，來說明數學與敘事之關連。

在提出有關數學學習的後結構主義 (post-structuralism) 之解釋時，Brown (1994) 援引了瑞士語言學家索緒爾 (F. de Saussure) 的語言學模型 (linguistical

⁴ 本節前半部主要參考 Thomas (2002)。

⁵ 參考洪萬生 (2009)。

⁶ 有關數學上的「特例」與「一般」之關係，可參考洪萬生 (2006)。

model)。目前符號學所謂的「能指」(signifier)、「所指」(signified)和「符號」(sign)，都出自索緒爾。在他原先的語言學架構中，「能指」通常表示一個聲音(sound)，而「所指」是表示一個連結到的概念(concept)。至於「符號」，則是將前述兩個元素結合成為一個完全心智現象(wholly mental phenomenon)。即使如此，符號本身不會具有意義，它的意義是由於與其他符號之關係而得。這一套有關符號的科學(science of signs) — 後來發展成為符號學(semiology)，就深入語言的表面事件(parole)的底層，去探討各色各類被隱藏的能指系統(signifying system)(langue)。而這也是 Brown 認為與數學教育最相關連的部份。

Brown 進一步論述說，數學系統(類比於langue)可能存在，不過，我們得以知覺數學，完全是由於我們參與數學知識活動中的個別行為(individual acts) — 這可以類比於一種(主觀的)言說行動(parole)。如此一來，意義(meaning)無法被視為與此系統中的個別符號結合在一起，⁷而是從言說的行動中浮現。在這些行動中，符號必須跟一些故事(stories)結合 — 這些故事，乃是吾人針對自身所介入的數學知識活動之描述而產生。⁸由於這些故事必然出自個人觀點，也必然與時間有關，所以它們的版本不可能唯一。儘管有學者認為意義出自「能指的過程」，然而，Brown 卻認為經由「故事」的使用以解釋數學經驗(mathematical experiences)時，所謂的「意義」可以看成是為了數學結構(asserting structures)之確立。

簡單地說，在數學學習時，意義來自針對數學經驗所說的故事。因此，數學當然與敘事有關。

現在，為了說明上引論述，我們在此引述多夏狄斯(Doxiadis)有關數學解題 vs. 偵探破案的類比。他相當熟悉結構主義敘事分析學者如波普(Propp)的民間傳說與Campbell的神話學等研究結果，⁹為了指出數學與敘事的密切關連，他在“Euclid’s Poetics”(2003)一文中，也論證了創造敘事(making narrative)與證明數學定理(proving mathematical theorem)之間具有很強的結構類比。此外，他還對比了波利亞(George Polya)的「怎樣解題」與偵探如何破案的策略，列出偵探方法步驟如下(Doxiadis, 2004)(其中劃底線者，表示與解題活動之策略雷同)：

- 猜測與檢驗
- 尋找一個胚騰 (諮詢犯罪檔案)
- 繪製一個圖形 (根據目擊者描述)
- 求解一個更簡單的問題 (進行片段的調查)
- 回顧 (想想誰是犯罪的受益者)
- 利用公式 (化學、基因或任意相關的技術)
- 製作一個前後順序的清單 (有關嫌疑犯)
- 排除一些可能性 (檢視不在場證明等)

⁷ 換言之，光靠一個系統內部的符號自身之結合，意義無法浮現。

⁸ Brown (1994) 的標題正是：“Describing the Mathematics You Are Part of: A Post-structuralist Account of Mathematical Learning”。

⁹ 參考 Doxiadis (2004)。

- 尋找實質證據
- 好好地分析
- 詢問目擊者
- 利用直接推理
- 要有創意

多夏狄斯也指出，上述這個單子來可以列出更多項目，正如同數學解題者的策略一樣。無論如何，上述這個類比，至少可以說明如何解題與如何敘事，的確有異曲同工之妙，無怪乎他努力結合同道，推動此一知識活動了。

事實上，多夏狄斯為此提出“paramathematics”之概念，以便刻畫此一跨領域的「數學與敘事」之知識活動。他說這個英文字根“para”在希臘文中指“at the side of”，正如“parallel”是指「在另一條線的一邊」(at the side of another)。(Doxiadis, 2004) 根據他的介紹，或許我們可以暫時中譯為「敘事數學」。多夏狄斯認為這一跨領域學門乃是介於下列學門的中間地帶：數學史、數學傳記、數學認知心理學、數學哲學（譬如擬經驗論 quasi-empiricism）、思想史 (history of ideas)、歷史相關分支與科學史等等。(Doxiadis, 2004) 由此可見，這一跨學門實質上與 HPM 十分相近，只不過多夏狄斯似乎比較強調敘事的面向了。¹⁰

三、數學小說 vs. 歷史小說

我們已經利用結構主義的敘事分析方法，針對多夏狄斯的《遇見哥德巴赫猜想》和小川洋子的《博士熱愛的算式》進行細緻的比較，其中當然也論及這兩本數學小說的價值與意義。¹¹

無論多夏狄斯或小川洋子的創作動機為何，他（她）們總是期待小說發揮某些「教育」功能，至少他們都試圖展現數學的美或數學知識的價值與意義。尤其是小川洋子的小說，一開始顯然並不著眼於科普，但是，一旦暢銷之後，¹²作者倒是十分積極地與數學家對談數學教育的議題。¹³或許我們在此應該引述其他作者的現身說法。Suri & Bal 在他們的數學小說 *A Certain Ambiguity* (2007) 序言指出：

¹⁰ 其實，多夏狄斯對於數學史社群乃至於 HPM 社群看起來頗為陌生，以致於這些研究成果如何有利於「數學與敘事」，他似乎無法給予恰當的評價。

¹¹ 參考林芳玫、洪萬生，〈數學小說初探：以結構主義敘事分析比較兩本小說〉。

¹² 截至 2008 年 5 月為止，本書在日本已經賣出二十七刷了。在台灣，則中譯本截至 2008 年 6 月為止，已經出版了十刷。

¹³ 譬如她與數學家藤原正彥就曾對談數學美如何欣賞，參考藤原正彥與小川洋子 (2005/2007) 或小川洋子、岡部恆治、菅原邦雄、宇野勝博 (2006/2007)。

我們書寫 *A Certain Ambiguity* 這一本小說的主要目的，是想向讀者證明數學是美麗的 (beautiful)。而且，我們也努力證明數學的深刻性，對於人類真正在乎的事情之意義。我們相信通過小說的媒介，這兩個目標最容易達成。畢竟，感受到事物美的是我們人類，同時，也正因為我們是人類，才感受得到相關哲學問題的即時性。而要吸引人類進入這一圖像（世界）的不二法門，則莫過於說一個故事。(Suri & Bal, 2007, p. vii)

既然是小說，故事與人物當然主要是虛構的，¹⁴不過，其中所涉及數學知識無論在小說世界還是現實世界中，都是真實的。還有，作者還想利用「事實的數學」(factual mathematics) 與虛構的敘事 (fictitious narrative) 之間的模糊灰色地帶，強調數學家進行數學研究的有血有肉形象。¹⁵

再有，《鸚鵡定理》(*The Parrot's Theorem: A Novel*) 也是一部以呈現數學史為主的數學小說。¹⁶作者居耶德 (Denis Guedj) 利用虛構的小說人物，在合理的故事情節中，說明某些數學史實與巴西雨林數學家被謀殺謎底之關連。其中，作者所述及的數學史，當然都是有憑有據的事實。

另一方面，有一些歷史小說 (historical fiction) 的人物與主角不見得是虛構的，譬如以愛達·洛甫萊斯 (Ada Lovelace) 為主角的《科學的新娘》(伍列，2003)，就是有關十九世紀英國真實人物與事件的歷史小說。不過，該書所包括的數學甚少。相反地，以少年的蘇菲·姬曼 (Sophie Germain) 為主角的 *Sophie's Diary*，則是一點也不避諱數學論述的歷史小說。換言之，它同時是一部歷史小說，也是一部數學小說 (Musielak, 2005)。

根據 Alex Kasman 的數學小說網頁，¹⁷上面提及的歷史小說也都收錄在列。其中，就分類而言，*A Certain Ambiguity* 的文類 (genre) 為歷史小說、教學法 (didactic)，小說要素 (motif) 包括學院、證明定理、真實數學家 (real mathematicians)、女數學家、數學美、有趣與有用、羅曼史、數學教育，以及宗教。《鸚鵡定理》的文類為歷史小說、神秘、奇幻 (fantasy)，以及教學法，小說要素為真實數學家。至於 *Sophie's Diary* 的文類則是歷史小說、教學法再加上兒童文學 (children's literature)，小說要素則包括神童、真實數學家、女數學家，以及數學教育。針對這部小說的評價，Kasman 提供了數學內容 (mathematical content) 與文學品質 (literature quality) 兩項指標，供瀏覽者在網路上投票，結果儘管投票人數不一，但是，它們的這兩項指標的平均數都在 5 級分的 4 分以上，可見它們都是名符其實的數學小說。

由於傳記在科普作品中也十分熱門，因此，我們在下一節中，也將略述數學

¹⁴ 在《博士熱愛的算式》中，博士、管家等人物都是虛構的，儘管職棒投手江夏豐是一位真實的人物。相反地，在《遇見哥德巴赫猜想》中，派楚及其侄兒（第一人稱）等都是虛構的，不過，其中所提及的 1920 年代的偉大數學家，則都是真實人物。

¹⁵ 參考 Suri & Bal (2007), p. vii。

¹⁶ 參考洪萬生 (2009)。

¹⁷ 參考 <http://kasmana.people.cofc.edu/MATHFICT>。

家傳記如何可以成為科普閱讀的對象。

四、數學家傳記：以科普作品為例

一般而言，專業數學史家出版學術性的數學家傳記，都不是為了普及的目的。不過，目前倒是有頗多的數學家傳記，卻是由科普作家所出版，其創作品質值得我們通過數學與敘事來給予評價。

根據 Martin Davis (2000) 的看法，Eric T. Bell 最早使用數學家傳記作為一種（普及）策略，特別是生動的軼事，以方便引介這些數學家的發現成果給社會大眾，¹⁸他的《大數學家》(Men of Mathematics)，儘管不無誇張渲染或扭曲史實，仍然吸引頗多讀者的注意。¹⁹

不過，Davis 對於歷史書寫 (history writing) 和說故事 (storytelling) 的密切關係，還是非常在意。他發現到有一些科普作家並不理解他們所寫的東西，譬如，他就嚴厲批判《數學巨人哥德爾》一書的作者約翰·卡斯提和維納·德包利，因為他們在說明有關高斯發現的等差級數求和公式延拓到 $1+2+\dots+n=n(n+1)/2$ 如何成立時，犯了明顯毫無理由的謬誤。²⁰另一方面，Davis 雖然不是歷史學家，但是，他對於傳主的生平真實事蹟，則認為毋須隱瞞，譬如奧地利偉大的邏輯學家弗列格 (Gottlob Frege) 曾經支持納粹反猶太，就與其坦然面對羅素集合悖論之致命衝擊之生命格調，明顯地無法相容。²¹

在數學教育這一邊，說故事，尤其是說有關數學或數學家的故事，一向都是數學教師在課堂中最受歡迎的教學插曲。在論及數學家傳記如何融入數學教室活動之前，我們必須首先釐清課堂上如何可以運用數學史。大致說來，後者可以分為三個層次，第一，當然就是前述的「說故事」！然則怎麼「說」呢？我們認為史實的「求真」固然重要，但由於我們的目的在於數學的教與學之成效，所以，只要能夠提振學生的士氣與興趣，就已經達到初步的目的了。²²當然，學生如果因此而得到人格與認知兩方面的啟發，那麼，數學史的運用價值就更高了。此外，如果可以在引入傳記的脈絡中，「從歷史的角度注入數學知識活動的文化意義，

¹⁸ 在《大數學家》的第一章〈前言〉中，Bell 指出：「無論從任何意義上來說，這本書不打算寫成一部數學史或數學史的任何部份。書中介紹的數學家生平，是為一般讀者以及其他希望了解創立進代數學的到底是什麼樣的人的那些讀者而寫的。我們的目的是，逐步介紹一些至今仍然支配著數學上許多重大領域的主導概念，並且通過那些概念的創造者生平來達到此目的。」因此，他在遴選數學家時，「採用了兩個標準：其著作對近代數學的重要性；其生活與性格對人們的吸引力。……當幾個人取得一種特殊的進展而值得紀念的情況下，兩項標準有所抵觸或重疊時，我們把第二項標準放在優先的地位，因為我們主要關心的是這些數學家到底是什麼樣的人。」(Bell, 1998, 頁 1)

¹⁹ 譬如他有關伽羅瓦的決鬥前夕之戲劇化敘事，由於與史實不符而備受批評，不過，很多天才數學家如陶哲軒（澳洲華人，2006 年 Fields 獎得主）就承認年幼時深受該書之啟發與鼓舞。

²⁰ 本書作者認為模仿高斯的「發現 / 證法」，這一公式僅對任何固定 n 成立，但是，對於每一個 n 的情況之成立，則並未證明。見約翰·卡斯提和維納·德包利 (2003)，頁 33-34。

²¹ 可參考 Davis (2001), pp. 41-47.

²² 柏林霍夫 / 辜維亞曾提及高斯發現等差級數求和公式的多個故事版本，但也指出無一可以確認為真，在這種情況下，他們認為但說無妨，因為每一個大同小異，都充滿了認知的啟發性。參考柏林霍夫 / 辜維亞 (2008)，頁 2-3。

在數學教育過程中實踐多元文化關懷的理想」，那就更是「善莫大焉」。(洪萬生，1999b)

至於數學家傳記如何具體地「融入」教學過程之中，我們不妨參考 Helena Pycior (1987) 的看法。由於 Pycior 是任教於歷史系的專業數學史家，因此，她對於「傳記」如何引進數學教室，難免比較求全。其實，要是她有機會走進數學課堂實際參與教學，她對「傳記」如何利用說不定會有「另類」的反省。換言之，一旦數學史家有了數學教學關懷之後，他（她）們對於數學史如何「融入」數學的教與學，或許會變得比較從容與自在。

事實上，Pycior 指出如何使用有三個面向值得考量：

- 使用的目的；
- 隨著目的，而選擇相關層次的傳記；
- 時時吸收最新的傳記資料。

顯然，她極力將傳記的使用目的，從娛樂提升到更高層級 — 紀念價值與數學的人性化。在學生普遍畏懼、討厭數學的情勢下，將數學或數學家人性化，將有助於降低學生對數學的焦慮與冷漠，更進一步地可讓他們心中無數的挫折感得到抒發。譬如說吧，如果天縱英明的康熙皇帝都無從理解符號代數(洪萬生，1999a)，那麼，學生對自己的學習挫折應該比較釋然，教師再來引導或鼓勵，或許就比較容易了。

柏林霍夫和辜維亞也在他們的《溫柔數學史》中，提及傳記如何引進數學教室，他們針對高斯發現等差級數求和公式之故事，提出下列評論：

說這樣的故事的確有一些用處。畢竟，這是一個有趣的故事，其中有一位學生成了英雄人物，機智更勝於他的老師。這個故事本身將讓學生深感興趣，而且他們或許會記住。由於牢記在他們的記憶之中，這個故事有如一個掛鉤，可以在上面掛一個數學概念—在本例中，這是指算術數列的求和方法。就像大部分傳記的評論一樣，這個故事也提醒學生，有真實的人物在他們所學習的數學背後，同時，某人也必須發現這一公式，並掌握這一概念。(柏林霍夫 / 辜維亞，2008，頁 3)

他們還指出：當這一故事按照一般人熟悉的方式陳述時，它可以引導學生自己發現公式，亦即數學的認知面向仍然至關緊要。無怪乎他們提醒讀者說：「使用歷史或傳記軼事的主要限制，經常由於他們只是略微連結到數學而已。」

根據上述有關數學家傳記如何引進教學的反思，我們在此以《不只一點瘋狂》為例，²³指出作者如何將這個有關天才數學家艾狄胥的傳奇故事，說得數學不只是裝飾用的名詞而已。事實上，數學家張海潮為本書導讀時，就已明白注意到作者在各章之間，不斷地嘗試從數學之美和數學之嚴謹，來回答何以數學對於一生

²³ 有關本書之評論，可以參考王鼎勳 (2008)。有關艾狄胥，另外還有一本傳記《數字愛人》，評論可參考洪宜亭 (2008)。

漂泊的艾狄胥，具有那麼大的吸引力。從本書第二章開始，作者就依序引進畢氏定理、 $\sqrt{2}$ 是無理數、歐幾里得如何證明質數無窮多、尤拉如何解決七橋問題、常態分布與機率數論，以及康托的集合論。顯然，正如張海潮所指出：「作者非常清楚，描繪 E（按：即艾狄胥的簡稱）的一生若略過數學，必然流於空泛。但是他能如此技巧地交互穿插，呈現出 E 與數學的美妙『糾葛』，使整本書毫不顯艱澀，趣味和知性並陳，可說相當周到。」（張海潮，1999）

五、對通識教育之啟發

現在，我們就從人格與認知啟發這兩個方面，來簡述數學小說與數學家傳記在通識教育中的功能。正如前述，在此，所謂的通識教育，是指圍繞著數學知識活動的一個課程與教學。

由於數學小說離不開數學史敘事，因此，我們或許可以先引述《溫柔數學史》一書對於歷史與故事之連結的觀點。在該書中，兩位作者指出：

我們已經盡可能精確地反映今日被熟悉的歷史事實。然而，歷史畢竟不是嚴正科學 (exact science)，而且不完備或相互衝突的來源，在學者之間，經常導致他們針對事實的無法相容的判斷。有些有關人物與事件的故事已經演化多年，形成一種極少文獻證據支撐的「傳說」。儘管這些對於歷史學者不無困擾，然而，很多這類故事卻深具價值，它們就像每一個文化中的傳說一樣，發揮了寓言的啟發作用，或者勾起記憶的「引子」，以幫助你或你的學生記住某一個數學概念。與其完全忽視這些軼事而喪失其價值，我們不如精選最有趣的幾則納入本書相關題材，連同適當的提醒以避免過於表面的對待。（柏林霍夫 / 辜維亞，2008，頁 2）

這一進路，當然也呼應了兩位作者的研究教學經驗，因為他們都相信數學史是大學通識階段數學課程不可缺少的一環，同時，在教師教育（含課程、教學與學習）方面，也至關重要。²⁴

其實，根據我們自己的實踐心得，數學普及書寫「除了觸及歷史文化脈絡與數學知識活動的相互影響之外，也希望提供一些至今仍具有意義的數學知識。歷史文化的脈絡意義，誠然一直在更新或改變，但數學知識卻歷久彌新，譬如『畢氏定理』的內容，甚至它的古典證明，也具有永恆不朽的學習價值。透過一些具體實例的呈現，我們希望可以更加「貼近」數學知識成長的歷史意義，從而凝聚出一致的科普數學書寫 (popular mathematics writing) 的主張。」（洪萬生等，2008，頁 2）換句話說，我們在共同書寫《當數學遇見文化》(2009) 時，不僅重視歷史敘事的包裝，也注意到敘事過程中的學習認知之意義與價值。

²⁴ 參考柏林霍夫 / 辜維亞，《溫柔數學史》，頁 1。

這種針對認知意義之凸顯，在傑出數學家 Barry Mazur 的普及作品 *Imagining Numbers* 中，更是提供了敘事包裝之範例。Mazur 指出本書是為下列人士而寫：「數學外行人、以及那些自從中學以來就不曾好好想過數學的人，或甚至他們即使有，但卻可能希望能經驗數學想像，並考慮這一經驗如何可以對比閱讀和理解一首詩的想像工作」。在虛數的概念發展史上，十六世紀數學家邦貝利 (Raphael Bombelli, 1526-1572) 的貢獻絕對不容忽視，這是因為他首先是將這些物件 (entity) 視為數，從而對它們進行加減乘除運算。更重要的是，他將 Del Ferro-Cardano (三次方程的根式解) 公式，應用在三次方程式 $x^3 = 3x - 2$ 時，無法得到實根，除非實數可以利用複數表示。於是，Mazur 就虛構了一個對邦貝利的訪問，將十六世紀數學家對複數的認知，融入歷史脈絡之中。²⁵

本小節最後，我們打算引述《博士熱愛的算式》英譯版書末 (未編頁碼) 的「問題討論」(Discussion Questions) (共有 11 則，由英譯者 Stephen Snyder 所提供) 第 7、10 則，以便說明像這樣的一本數學小說，如何可以應用在通識教育課堂上：

- 第 7 則. 1 到 10 的總和不難求出，然而，博士堅持要根號找出特別的方法。最後，根號與管家攜手獲得答案。請問他們的解法具有主題式的重要性 (thematic importance) 嗎？一般來說，小川洋子如何利用數學例證來說明一個整體的世界觀 (a whole worldview)？
- 第 10 則. 小川洋子選擇書寫實際的數學問題，而不是抽象地書寫數學。在某個意義上，她邀請讀者順著書中人物學習數學。你認為她為何這樣書寫？或許這是為了增強你對這些人物的同理心？²⁶

我們認為上述這兩個問題，多少可以指出數學與敘事如何可以關連到通識教育上了。

六、如何對 HPM 有用？

誠然，對於認知面向的重視，也是數學與敘事連結的一個必要提醒。這是因為故事或敘事固然可以吸引一般人對於數學文化的興趣，但是，過度花俏的裝飾可能無助於基本概念的澄清—所謂文勝於質，因此，Mazur 才會深以為戒。

(Mazur, 2005)

不過，如果故事編得生動有趣，那麼，融入這些敘事的數學概念之教學一定

²⁵ 參考 Mazur (2005), p. 154. 有關複數的歷史，非常值得參考 Nahin (1998), pp. 18-22. 又有關後書之評論，也不妨參考英家銘的評論 (英家銘, 2008)。

²⁶ 在《博士熱愛的算式》中有四位主要的人物，管家 (第一人稱) 及其兒子 (暱稱根號)，博士 (因車禍受傷提早退休的數學教授) 及其寡嫂。管家乃是寡嫂雇用，前來照顧博士的起居生活，根號是 10 歲男孩，放學後前來陪伴博士和媽媽。

可以獲得 Hans Freudenthal 所主張的「引導式的再發現 / 再發明」(guided discovery / invention) 之成效。這種適當地向歷史上的數學家或數學文本「商量」的策略—奠基於詮釋學雙循環模型 (Hermeneutic Twofold Circle)，在 Jahnke (1994)，Archavi & Isoda (2007) 以及洪萬生與蘇俊鴻 (2008) 的 HPM 與教師教育的研究報告中，已經可以看到一些具體成績。另一方面，有些研究教師教育的數學教育家則利用敘事及其分析來探索教師專業成長，其中固然少不了數學認知面向，不過，其角色之建立或改變，大都與情意或信念比較相關，相關之文獻有 De Freitas (2008)、Foote (2007)、Protaankorva-Koivisto (2007) 及 Solomon & O'Neill (1998) 等等。其中，除了 Solomon & O'Neill 的論文之外，都未涉及數學史敘事，儘管它們都將敘事分析視為一種研究工具。²⁷至於 Solomon & O'Neill (1998)，則利用了漢彌頓 (William Rowan Hamilton, 1805-1865) 自己針對四元數之發現的敘事及其正式發表的論文之分析，再結合文類理論 (genre theory)，說明數學家在許多非敘事的文類 (non-narrative genres) 中作研究，並因此建立其相關的數學意義。換句話說，數學知識無法基於敘事而適當地傳遞，部份原因乃是數學經由邏輯而非時態順序 (temporary order) 以獲得融貫性 (cohesion)。

儘管如此，Solomon & O'Neill 的研究結果主要針對敘事 vs. 學校數學 (school mathematics) 學習的批判與反思，這相對於我們認為「敘事數學」可以介入的教師教育與通識教育而言，應該較無影響才是。因此，如果數學普及閱讀（與評論）可以而且應該在 HPM 或通識教育中找到一個定位，那麼，數學小說這種文類，將是一個值得嘗試的選擇。

七、結論

從數學與敘事的對比來看，我們可以發現如何解題或推理 vs. 如何敘事的平行性，同時，就結構而言，數學與小說也呈現了令人驚奇的類比 (analogy)。此外，由於小說中的人物及其相關情節很容易被讀者認同，因此，《博士熱愛的算式》的英譯者 Stephen Snyder 所指出來的敘事特色（第 10 則問題）（見上文第五節），可以「邀請讀者順著書中人物學習數學」。針對這一點，傑出數學家 Mazur 也希望能讓外行人「經驗數學想像」，他所虛構的對邦貝力的訪問，顯然是為此而設計。另一方面，在《博士熱愛的算式》的小說中，博士堅持要小男孩（名叫根號）找出特別的方法，以求得 1 到 10 的總和。這個敘事充分強調了「引導式再發現」的意義，對於我們的 HPM 甚有啟發。就學習的認知與情意兩個面向而言，數學小說比起數學家傳記顯然有了更大的揮灑空間，儘管正如 Solomon & O'Neill 所論述（上文第六節），有些數學知識由於邏輯特性，而無法基於敘事而適當傳遞。²⁸

²⁷ 這些研究者大都採用社會建構主義 (social constructivism) 觀點，其哲學立場與本文第二節所述之後結構主義相近。

²⁸ Sfard (2000) 有關「數學言說」(Mathematical Discourse) 在數學教育改革中的限制之研究結論，也與此相近，值得參考。

總之，數學與敘事在教育上的應用，特別是在通識教育方面，非常值得我們大力拓展，將來一定可以回過頭來，更多方面地惠及數學教育的理論與實際。

最後，基於本文之論述，我們打算順便提供台灣師大數學系所開授的核心通識課程的實施情況，作為將來進一步探討相關主題的參考依據。

有關本校之「數學與科學思維」領域，²⁹在目標方面，希望綜合數學、物理、化學基本能力，培養學生的數量識能，並掌握自然科學的思維方式。具體而言：本領域希望 1. 引導大學生瞭解數學、物理、化學的內容、意義以及方法。2. 提供實際生活和學習相關學科方面所需的數學與科學知能。3. 介紹數學、物理、化學內涵中結構嚴謹的論證理路，以培養學生的邏輯思維。4. 瞭解數學、物理與化學的人文面向，以掌握科學中「人性」的一面。至於內涵方面，則希望從不同學科與知識層面（含後設面向），來說明科學思維與論證的實質與意義。

在這個架構下，「數學活動與思維」的課程綱要可以引述如下。³⁰

- 教學目標：1. 疏解學生怕數學的心態，重建樂於親近數學的態度。2. 引導學生經驗數學與人文的活動與其他領域連結的活動。3. 賞析歸納、演繹與視覺推理等方法論。4. 培養數學的思維。5. 發展批判性分析的能力
- 教學內容：以中學數學知識為學習背景。強調數學的外部領域連結與數學技能的應用，深入到數學思維方法的發展。

至於上課方式，則至少由十位本校教授分別從數學史、問題解決的思維、自然成長的奧秘、數學哲學與美學、東方數學思維、生活邏輯、無限概念、遊戲數學（魔術方塊與納許棋）、圖案設計、數學與小說藝術、不確定性的推論與批判、旅遊與休閒數學、數學普及書籍閱讀與寫作，以及數學變換等單元，來與學生分享數學活動與思維的價值與意義。³¹有關評量，則除了平時上課的作業（大部分與數學有關）之外，主要是要求選課學生必須就兩本數學普及書籍，口頭並撰寫閱讀心得報告，³²作為期中、期末成績評量的參考依據。³³

總之，這一門課程的目標顯然是一種非常強調多元的（數學）通識，符合多

²⁹ 參考本校通教育中心網頁 http://www.ntnu.edu.tw/aa/aa5/sb2/sb2_f.htm。這一核心通識課程的規劃，在國內高等教育界，是非常基進同時充滿進步性的策略，非常值得高度肯定。

³⁰ 參考本系網頁 http://www.math.ntnu.edu.tw/course/general_edu/。

³¹ 這些教材及其教學，都呼應我們共同擬定的教學目標如態度（興趣與信心）、方法論（歸納與演繹）、連結（現實與文化）、問題解決（思維機制），以及溝通（批判分析），參考本系網頁 http://www.math.ntnu.edu.tw/course/general_edu/。

³² 撰寫時可以參考我們提供的「優秀數學普及書籍指標」，參考本系網頁 http://www.math.ntnu.edu.tw/course/general_edu/。

³³ 有關的評分標準也相當規格化。參見本系網頁 http://www.math.ntnu.edu.tw/course/general_edu/。

元派的主張：「通識教育的出發點既然是打破狹隘專業取向，就應該在教材與教學取向上更有彈性，可以包括多元素材。」³⁴如此一來，數學與敘事的介入，在我們的前述的討論中，無論是數學小說、歷史小說或傳記，都可以成爲極佳的教材，適足引動或激發學生的認知或情意面向，從而進一步體會即使是職業作家所撰寫的數學小說或數學家傳記，也可引動數學思維活動之參與，因此，數學與敘事的結合不僅在數學教育研究中有其重要性，它在 HPM 或通識教育中的功能，也不容忽視。

參考書目

(一) 數學小說文本

- 小川洋子 (Yoko Ogawa)(2003). 《博士の愛した数式》。東京：新潮社。
- 小川洋子 (2004). 《博士熱愛的算式》(王蘊潔翻譯)。台北：麥田出版社。
- 多夏狄斯 (Apostolos Doxiadis) (2002). 《遇見哥德巴赫猜想》(*Uncle Petros & Goldbach's Conjecture*)(王維妮譯)。台北：小知堂出版社。
- 居耶德 (Denis Guedj). 《鸚鵡定理：跨越兩千年的數學之旅》(漢斯中譯，洪萬生審訂推薦)，台北：究竟出版社。
- 伍列 (Benjamin Woolley) (2003). 《科學的新娘》(*The Bride of Science: Romance, Reason and Byron's Daughter*) (席玉蘋中譯)，台北：台灣商務印書館。
- Doxiadis, Apostolos (2000 / 2001). *Uncle Petros & Goldbach's Conjecture*. London: Faber & Faber Limited.
- Guedj, Denis (2000). *The Parrot's Theorem: A Novel*. London: Weidenfeld & Nicolson.
- Musiellak, Dora (2005). *Sophie's Diary*. Bloomington, IN: AuthorHouse.
- Ogawa, Yoko (trans. by Stephen Snyder) (2009). *The Housekeeper and the Professor*. New York: Picardo.
- Suri, Gaurav & Hartoosh Singh Bal (2007). *A Certain Ambiguity: A Mathematical Novel*. New Jersey: Princeton University Press.

(二) 論述

- 小川洋子、岡部恆治、菅原邦雄、宇野勝博 (2006/2007). 《博士がくれた贈り物》，東京：東京圖書。
- 王鼎勳 (2008). 評論《不只一點瘋狂—天才數學家艾狄胥傳奇》，台灣數學博物館科普特區「深度書評」欄 (<http://museum.math.ntnu.edu.tw>)。
- 林芳玫 (2008). 〈媒體素養教育與通識教育：台文所脈絡下的文學教學〉，《教育資料與研究》80: 1-24。
- 林芳玫、洪萬生 (投稿中). 〈數學小說初探：以結構主義敘事分析比較兩本小說〉。
- 洪宜亭 (2008). 〈評論《數字愛人：數學奇才艾迪胥的故事》〉，台灣數學博物館科普特區「深度書評」欄 (<http://museum.math.ntnu.edu.tw>)。
- 洪萬生 (1999a). 〈康熙皇帝與符號代數〉，《HPM 台北通訊》2(1): 1-3

³⁴ 林芳玫將黃俊傑所歸類的通識教育理念之四種主張，如精義論、均衡論、進步論和多元論，簡化爲經典派與多元派，參考林芳玫 (2008)。

- 洪萬生 (1999b). 〈HPM 隨筆 (二)：數學史與數學的教與學〉，《HPM 台北通訊》2(4): 1-3
- 洪萬生 (2006). 〈中算史中的「張本例」(generic examples)〉，收入洪萬生，《此零非比0》(台北：台灣商務印書館，2006)，頁 190-193。
- 洪萬生 (2008). 〈遇見哥德巴赫：數學天才的困境〉，台灣數學博物館科普特區「深度書評」欄 (<http://museum.math.ntnu.edu.tw>)。
- 洪萬生 (2009). 〈從希爾伯特《幾何學基礎》看形式主義〉，台灣數學博物館「數理文本解析與導讀」欄 (<http://museum.math.ntnu.edu.tw>)。
- 洪萬生、英家銘、蘇意雯、蘇惠玉、楊瓊茹、劉柏宏 (2008).《當數學遇見文化》，台北：三民書局。
- 洪萬生、蘇俊鴻 (2007). 〈海龍 (Heron) 公式怎麼教？一個 HPM 的插曲〉，《Journal of Basic Education (基礎教育學報) (Hong Kong) 16(1): 81-96。
- 洪萬生、蘇俊鴻 (2008). 〈利用 HPM 來概念化數學教師教育：以畢氏定理和餘弦定律之統整為例〉，「數學教育研討會 2008：數學思考和解題」，香港教育學院，2008/4/29-30。
- 洪萬生 (2009). 〈鸚鵡定理〉，台灣數學博物館科普特區「深度書評」欄 (<http://museum.math.ntnu.edu.tw>)。
- 英家銘 (2008). 〈虛話實說：根號-1 的故事〉，台灣數學博物館科普特區「深度書評」欄 (<http://museum.math.ntnu.edu.tw>)。
- 波利亞 (George Polya) (2007).《怎樣解題》(蔡坤憲中譯)，台北：天下文化出版公司。
- 張海潮 (1999). 〈造次必於是，顛沛必於是〉，布魯斯·柴斯特《不只一點瘋狂》(中譯本)「導讀」(台北：究竟出版社)，頁 7-10。
- 單維彰 (2008). 〈記憶著愛情的數學等式〉，台灣數學博物館科普特區「深度書評」欄 (<http://museum.math.ntnu.edu.tw>)。
- 藤原正彥 (Masahiko Fujiwara) / 小川洋子 (Yoko Ogawa)(2005/2007).《世にも美しい數學入門》，東京：筑摩書房。
- 蘇惠玉 (2006). 〈溫柔與感傷的數學真理－閱讀《博士熱愛的算式》〉，《HPM 通訊》9(6): 19-20。
- 比爾·柏林霍夫 (William P. Berlinghoff) / 佛南度·辜維亞 (Fernando Q. Gouvea) (2008).《溫柔數學史》(*Math through the Ages: A Gentle History for Teachers and Others*) (洪萬生、英家銘暨 HPM 團隊合譯)，台北：博雅書屋。
- 布魯斯·柴斯特 (Bruce Schechter) (1999).《不只一點瘋狂》(*My Brain is Open: The Mathematical Journey of Paul Erdos*)，台北：究竟出版社。
- 保羅·霍夫曼 (Paul Hoffman) (2001).《數字愛人：數學奇才艾狄胥的故事》(*The Man Who Loved Only Numbers*)，台北：臺灣商務印書館。
- 約翰·卡斯提 (John L. Casti)、維納·德包利 (Wermer De Pauli) (2003).《數學巨人哥德爾》(*Godel: A Life of Logic*)，台北：究竟出版社。
- Bell, E. T. (1998).《大數學家》(*Men of Mathematics*)，台北：九章出版社。
- Osen, Lynn M. (2001).《女數學家列傳》一版二刷(彭婉如、洪萬生譯，邱守榕審訂)，台北：九章出版社。
- Arcavi, Abraham, Masami Isoda (2007). "Learning to Listen: From historical sources to classroom", *Educational Studies in Mathematics* 66: 111-129.
- Barry, P. 1995. *Beginning Theory: An Introduction to Literary and Cultural Theory*.

- Manchester: Manchester University Press.
- Barthes, R. 1977. "Introduction to the Structural Analysis of Narrative." In *Image-Music-Text*. Trans. By Stephen Heath. New York: Hill and Wang, 79-124.
- Boero, P., Pedemonte B. and Robotti E. (1997). "Approaching Theoretical Knowledge through Voices and Echoes: a Vygotskian Perspective", *Proceedings of the 21st International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, Lahti, Finland, vol. 2, pp. 81-88.
- Boero, P., Pedemonte B., Robotti E. and Chiappini (1998). " 'The Voices and Echoes Game:' and the Interiorization of Crucial Aspects of Theoretical Knowledge in a Vygotskian Perspective: Ongoing Research", *Proceedings of the 22nd International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, Stellenbosch, South Africa, vol. 2, pp. 120-127.
- Brown, Tony (1994). "Describing the Mathematics You Are Part Of: A Post-structuralist Account of Mathematical Learning. In Paul Ernest (Ed.) *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective* (London / Washington, DC: The Falmer Press), pp. 154-162.
- Brown, Tony (1997). *Mathematics Education and Language: Interpreting Hermeneutics and Post-Structuralism*. Dordrecht / Boston / London: Kluwer Academic Publishers.
- Burton, L. (1996). "Mathematics, and Its Learning, as Narrative – a Literacy for the Twenty-First Century", in D. Barker, J. Clay and C. Fox (eds.) *Challenging Ways of Knowing in English, Maths and Science*. Sussex: Falmer.
- Campell, J. (1972). *The Hero with a Thousand Faces*. Princeton, NJ: Bollingen.
- Davis, Martin (2001). *Engines of Logic: Mathematicians and the Origin of the Computer*. New York: W. W. Norton & Company.
- Davis, Martin (2005). "Mathematics and Biography", June 29 on <http://thalesandfriends.org>.
- De Freitas, Elizabeth (2008). "Enacting Identity through Narrative: Interrupting the procedural discourse in mathematics classroom", Matos, J. F., P. Valero & K. Yasukawa (Eds.) *Proceedings of the Fifth International Mathematics Education and Society Conference*. Lisbon: Centro de Investigacao em educacao, Universidade de Lisboa -- Department of Education, Learning and Philosophy, Aalborg.
- Doxiadis, Apostolos (2001). "Euclid's Poetics: An examination of the similarity between narrative and proof", Lecture given at the Mathematics and Culture Conference, Venice, April, 2001. On <http://www.apostolosdoxiadis.com/page/default.asp?1a=1&id=4>
- Doxiadis, Apostolos (2003). "Embedding Mathematics in the Soul: Narrative as a force in mathematics education", Opening address to the Third Mediterranean Conference of Mathematics Education, Athens, January 3, 2003. On <http://www.apostolosdoxiadis.com/page/default.asp?1a=1&id=4>
- Doxiadis, Apostolos (2004). "The Mystery of the Black Knight's Noetherian Ring", a keynote speech to the Fields Symposium on *Online mathematical investigation as a narrative experience*. University of Western Ontario, 11-13 June. 卅] <http://www.apostolosdoxiadis.com/page/default.asp?1a=1&id=4>
- Doxiadis, Apostolos (2008). "The Mathematics Logic of Narrative", on <http://www.apostolosdoxiadis.com/page/default.asp?1a=1&id=4>. A preprint to appear in Mirella Manaresi (Eds.), *Mathematics and Culture in Europe*.
- Ernest, Paul (1994). "The Dialogical Nature of Mathematics". In Paul Ernest

- (Ed.) *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective* (London / Washington, DC: The Falmer Press), pp. 33-48.
- Foot, Marry A. (2007). "Telling Tales from Outside of the Classroom: Narrative as a lens on how one teacher made changes in her mathematic teaching practice", Lamber, T. & L. R. Wiest (Eds.) *Proceedings of the 19th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Stateline (Lake Tahoe), NV: University of Nevada, Reno.
- Grunwald, Eric (2007). "Letter to the Editor", *Mathematical Intelligencer* 29(1): 5-6.
- Jahnke, Hans Niels (1994). "The historical dimension of mathematical understanding: objectifying the subjective". *Proceedings of the 18th International Conference for the PME* vol. I (pp. 139-156). Lisbon: University of Lisbon.
- Mazur, Barry (2003). *Imagining Numbers (particularly the square root of minus fifteen)*. Allen Lane The Penguin Books.
- Mazur, Barry (2005). "'Eureka' and the Other Stories", June 29 on <http://thalesandfriends.org>
- Nahin, Paul J. (1998). *An Imaginary Tale, The Story of $\sqrt{-1}$* . NJ: Princeton University Press.
- O'Neill, John 1993. "Intertextual Reference in Nineteenth Century Mathematics". *Science in Context* 6: 435-468.
- Piaget, J. 1968. *Structuralism*. Trans. by Chaninah Maschler. Paris: Universities of France Press.
- Portaankorva-Koivisto, Paivi (2007). "On the Way to Becoming a Mathematics Teacher – on the track of phenomenological mathematics", The 3rd Tampere Conference on NARRATIVE: Knowing, living, Telling. June 27-30, Tampere, Finland. On <http://uta.fi/conference/3narrative/abstracts/partaankorva-koivisto.htm>. 2008/12/30.
- Pycior, Helena (1987). "Biography in the Mathematics Classroom", Ivor Grattan-Guinness (Ed.) (1987), *History in Mathematics Education* (Paris: Berlin), pp. 170-186.
- Senechal, Marjorie (2006). "Mathematics and Narrative at Mykonos", *Mathematical Intelligencer* 28(2): ???.
- Solomon Yvette, John O'Neill (1998). "Mathematics and Narrative", *Language and Education* Vol. 12, No. 3: 210-221.
- Sfard, Anna (2000). "On Reform Movement and the Limits of Mathematical Discourse", *Mathematical Thinking and Learning* 2(3): 157-189.
- Thomas, Robert S. D. (2002). "Mathematics and Narrative." *The Mathematical Intelligencer* 24(3): 43-46.
- Tymoczko, Thomas (1994). "Structuralism and Post-structuralism in the Philosophy of Mathematics", *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective* (London / Washington, DC: The Falmer Press), pp. 49-56.
- Vass, Jeff (1994). "The Dominance of Structure in 'Post-structural' Critiques of Mathematics". In *Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective* (London / Washington, DC: The Falmer Press), pp. 143-153.
- (三) 網路資源
台灣數學博物館 (MTM) : <http://museum.math.ntnu.edu.tw>

《HPM 通訊》：<http://www.math.ntnu.edu.tw/~horng>
Alex Kasman: <http://www.cofc.edu/~kasmana/MATHFICT/>
Apostolos Doxiadis:
<http://www.apostolosdoxiadis.com/page/default.asp?1a=1&id=4>
Thales and Friends:
http://thalesandfriends.org/en/index.php?option=com_frontpage&Itemid=85

中文摘要

本文以數學與敘事為切入點，闡釋這一種新的研究進路如何可以應用在數學通識與 HPM 的相關研究。由於數學與敘事包括數學小說、歷史小說、數學家傳記等文類，因此，我們發現運用敘事來布置一個「引導式再發現」的情境，或者邀請閱聽人順著小說中的人物，一起經驗數學想像，可能是某些數學小說如小川洋子的《博士熱愛的算式》，受到高度歡迎的原因之一。至於從實徵的進路研究這些相關教育議題，則留到以後再說。

關鍵詞：數學與敘事、通識教育、HPM、數學小說、歷史小說、科普作品

英文摘要

**Apply Mathematics and Narrative to General Education and HPM:
A Preliminary Study**

Wann-Sheng Horng

Department of Mathematics, National Taiwan Normal University

Fang-Mei Lin

Graduate Institute of Taiwan Culture, Language and Literature

National Taiwan Normal University

In this article, the authors use “mathematics and narrative” as a point of departure, attempting to illustrate how this new approach can be applied to studies on HPM and general education in terms of mathematics. Due to genres concerning mathematics and narrative contain mathematical fiction, historical fiction and biography of mathematician and so forth, one can use narrative (fictional or factual) to design a context of guided re-discovery, or to invite audience to share mathematical experience along with the characters. This may well explain why Yoko Ogawa’s *The Housekeeper and the Professor* is getting so wide popularity. As for the aspects of empirical study we will come back later on.

Keywords: Mathematics and narrative, general education, HPM, mathematical fiction, historical fiction, popular science work

附記：本文原載《HPM 通訊》12(11): 1-11。