

# 推理敘事中的數學 — 作為數學與法治教育的例證

蘇惠玉

台北市西松高中

## 一、前言

2009 年的 2 月初，是剛開學忙碌的第一個禮拜，我參加了一個「數學普及書籍閱讀國際研討會」，也應邀發表了有關推理小說與數學教育的小小心得。在參與的過程中，一直覺得自己的專業性不夠，只能不斷給自己心理建設：「我是以數學教師以及讀者的身份發表我的心得而已，不用太過緊張。」不過，也由於此研討會的需求，看了多夏狄斯 (Apostolos Doxiadis) 的論文 “The Mystery of the Black Knight’s Noetherian Ring”，才感覺似乎發現數學教育的另一片天地。在這篇論文中，多夏狄斯提出一個新想法：將敘事的形式應用在數學教育。他除了類比數學與敘事的相似性之外，更將波利亞在《如何解題》中所提出的解題策略，逐條地對比到刑事偵辦的手法上。

以下是筆者針對此篇文章的整理與心得想法，並據以分析幾本數學推理小說，以及與數學有關刑事偵辦影集，說明數學對於推理小說中刑事偵辦角色之影響。至盼藉由這樣的分析，可以拋磚引玉，讓數學教師與學生們對數學與法治教育的關聯，有些微的啟發，從而刺激新的想法與創意，用來幫助學生的數學學習。

## 二、數學與敘事的相似性

所謂的敘事 (narratives)，指的是一種說故事的形式，可能是紙本（小說）、影片（電影）或是口語傳述。在多夏狄斯的上引文章中，他首先將數學證明的形式與內容，與敘事之間的相似性作一個比較：

數學證明	敘事
討論的對象、關係	人物、場景、關係
邏輯演繹	隨外在原因與人物意圖而進展
想像（瞭解結論為何被蘊涵）	演繹推理（認識想像的對象及推展故事的呈現）
達到目標（證明的結論）	達到目標（捉到犯人、打倒惡魔、得到真愛、自我成長）

學習過數學或數學證明的人都知道，數學證明一開始一定要先確定已知條件與結論（要證明物件）之間的關係，以及與這兩者有關的其他物件之間的種種邏輯關連。同樣地，在一個敘事中，亦必須先確定主角與各種人物之間的關係，時空背景、人物個性等等。因此，在數學證明與敘事之間，首先組成的材料與基本

架構是一樣的。

再者，數學推理以邏輯演繹做為推展的手段；而敘事故事的推展，同樣必須根據作者設定的外在因素或人物性格、意圖而走。在推理的過程中，數學家（或數學實作者）必須時常從簡短的已知條件與推理過程中，想像結論的存在意義，而敘事的內容雖是作者的想像產品，卻也必須遵守一般所認定的邏輯推理。最後，數學推理證明一定要達成目標，通常是得到所設定的結論（證明完成）。同樣地，在敘事中也一定會有個結局（或結論），例如逮到犯人、打倒惡魔、得到真愛，或是自我成長領悟等等。

由此看來，數學活動中的主體——數學推理證明的結構與手法，都與敘事之間存在著一個可以類比的相似性。如果我們進一步分析在數學解題或推理的過程中，數學實作者所使用的解題策略，則與刑事偵辦或推理小說中常用的手法簡直如出一轍。

### 三、數學解題策略與偵查辦案方法

在波利亞 (G. Polya, 1887–1985) 的《如何解題》(How To Solve It) 中，他將數學解題活動分成四個階段：

1. 瞭解問題：瞭解問題裡存在的各個關係，例如已知數與未知數之間的關係。
2. 擬定計畫：根據關係擬定解題計畫，大概知道需要有哪些計算、演算步驟或圖形。
3. 執行計畫：必須有耐心地、按部就班地逐步檢查，弄清楚所有的細節，直到確定沒有任何不清楚的陰暗角落會產生錯誤為止。
4. 驗算與回顧：藉由回顧整個求解過程，再次驗算答案與思考解答的過程，藉機加深對數學知識的理解，以及培養解題能力。

在第二階段「擬訂計畫」中，波利亞提到許多合理解決問題的方法。簡單摘要歸納他所提出通常會選擇的解題策略，包括：

- 猜測與檢驗 (Guess and check)
- 尋找規律 (Look for a pattern)
- 作圖表 (Draw a picture)
- 先解決簡單的問題 (Solve a simpler problem)
- 回溯 (Work backward)
- 使用公式 (Use a formula)
- 作出先後順序表 (Make an orderly list)
- 消除可能性 (Eliminate possibilities)

- 使用對稱 (Use symmetry)
- 考慮特殊例 (Consider special cases)
- 使用模型 (Use a model)
- 運用直接推理 (Use direct reasoning)
- 靈敏一點 (Be ingenious) (註：我的理解是有時靈光一閃，忽然有了解題靈感)
- 解方程式 (Solve an equation)

多夏狄斯將這幾個策略，與常在推理劇，或是現實世界中偵探（或警察）解決謀殺案件的手法作比較，發現在數學解題策略與偵查辦案時會使用的幾個手段之間，有非常驚人的相似性：

數學解題策略	偵查辦案方法
猜測與檢驗 (Guess and check)	猜測與檢驗
尋找規律 (Look for a pattern)	諮詢為罪案資訊建檔的人
作圖表 (Draw a picture)	如果有目擊證人，根據他的描述畫出素描
先解決簡單的問題 (Solve a simpler problem)	一段一段漸進式地辦案 (approach the investigation piecemeal)
回溯 (Work backward)	看看誰會從這件犯罪案中得利
使用公式 (Use a formula)	化學的、生物的或任何適用的科技
作出先後順序表 (Make an orderly list)	作出嫌疑犯涉案輕重的順序表
消除可能性 (Eliminate possibilities)	經由查證不在場證明消除可能性
使用對稱 (Use symmetry)	
考慮特殊例 (Consider special cases)	
使用模型 (Use a model)	
運用直接推理 (Use direct reasoning)	運用直接推理
靈敏一點 (Be ingenious)	靈敏一點
解方程式 (Solve an equation)	
	尋找物質證據

	適切地分析
	詢問證人

當然，對於許多推理劇的觀眾（讀者）而言，偵查謀殺案件的方法可能不只上述所列，不過，在多夏狄斯所列出的這幾個方法中，確實可以看到推理劇中用的方法與數學解題策略的共通性。

由於數學證明或解題的結構，與敘事結構有可類比的相似；再者，數學解題策略又與推理劇中常使用的查案方法，有一平行的類比，因此，我們常可以在一些推理劇中發現數學的蹤影。例如，可以在刑事偵辦類型的推理劇中，看到與數學推理邏輯相符的辦案推理邏輯；再者，雖然為數不多，但是最近也開始看到以數學結構或知識內容為主所形成的推理小說；甚至，在目前也有一部影集標榜以數學知識來解決犯罪案件。數學在推理劇中的角色功能或許有異，但不可否認地，數學也是推理劇中經常出現的一個大咖。以下，我將以目前我看到的一些推理小說或影集為實例，分享我的簡單分析心得。

#### 四、數學在推理劇中的角色

##### 1. 以邏輯推理為主要依據來推展劇情

在一般的推理小說或是刑事辦案的影片中，主要結構一定有一個「謎」需要破解，通常都是一個謀殺案件。而主角則需隨著情節推演，利用所得的線索一步步解謎。由於在解謎的過程中，運用到的都是「推理」的技巧，這種推理的技巧當然與數學邏輯推理相符。因此，只要熟悉數學證明的推理邏輯，在看推理劇時通常可以隨著劇情的進展，預知警察所要採取的下一步驟。這種推理劇最典型的例子，就是風靡美台的 CSI 系列了。

CSI (Crime Scene Investigation) 系列影集為美國 CBS 電視台的招牌影集。從 2000 開始播出，分為拉斯維加斯、邁阿密與紐約三個系列，台灣在有線 AXN 台播出。這一系列的影集皆以刑事鑑定為主要破案工具，主角為一群刑事鑑定人員。以拉斯維加斯為例，在每一集中，幾乎都以謀殺案件為開場，接著鑑識人員登場，收集證據，然後依照收集到的證據找關係人（嫌疑犯）來推展故事情節。例如找到指紋或血跡，就比對指紋或 DNA，如果有符合的人出現，就找來問話；如果現場遺留子彈，就比較子彈的彈道痕跡，然後比對資料庫中的刑案歷史，以槍找人等等。

在這一齣影集中，必須隨著事證的出現，劇情才得以進展下去，因此，故事的進展必須以邏輯推理做為依據。這樣的邏輯推理與我們熟悉的數學證明的邏輯推理並無不同，可以說邏輯推理是這齣影集的主要架構。另外，在這一系列的影

集中，證據的分析通常需要藉理工知識的幫助，例如指紋的蛋白質組成成分、各種物質（玻璃或金屬）的光學折射、溫度或昆蟲對屍體的作用等等。就數學方面而言，在這系列影集中，最常出現的是有關三角測量的知識與彈道角度的相關問題。例如，利用三點及已知的距離、高度，在照片中分析出拍攝地點；利用角度分析找出射擊手的位置等等。在精彩緊湊的節目中，這一齣影集所蘊含的充沛的理工背景知識，也可以滿足作為一齣科學影集所需要的認知面向的需求。<sup>1</sup>

## 2. 利用數學知識或概念來設計劇情

在為數眾多的推理小說市場中，要找出以數學為主體，或專為數學而寫的推理小說並不容易，然而，總有某些具備理工背景的小說家願意嘗試，也有少許數學背景的學者投入這個市場。就我所知翻譯成中文的這一類推理小說，有吉耶摩·馬汀涅茲 (Guillermo Martinez) 的《牛津殺人規則》、森博嗣的《不會笑的數學家》與東野圭吾的《嫌疑犯 X 的獻身》。以下，我將以《嫌疑犯 X 的獻身》與《牛津殺人規則》為例，來進行分析。

《嫌疑犯 X 的獻身》是日本推理小說大師東野圭吾的作品，為《偵探伽利略》系列中的一本。不同於一般推理小說，這本書並不是在找犯人，因為一開始不久，犯罪者就把受害者殺了！因為讀者一開始就知道犯人是誰了，因此，本書的謎來自於如何將犯罪者定罪。書中的主要人物石神是一位高中數學老師，暗戀他的鄰居靖子，因此，當靖子母女失手將靖子的前夫殺死之後，石神挺身而出，為靖子設計一連串能讓她脫罪的巧妙計謀。隨著一具有靖子前夫身份證件的屍體被發現，刑警草薙展開了調查。這本書的主軸，就在於石神運用了數學訓練賦予他的邏輯思考，設計了一個問題讓警方解決，以及草薙與主角湯川學如何隨著事證與線索的發現，運用邏輯推理能力「證明」他們心中的嫌疑犯真的犯下罪行。

東野一開始就把這本推理小說的解謎活動，定位在邏輯思考，因此，石神對靖子說：「一切交給我的邏輯思考」；而邏輯是數學的一部份，因此，我們可以把「運用邏輯思考解決謎題」當成是一種數學活動。當然，如果同意這一點的話，那麼，每本推理小說都可說是融入了數學的元素在內。然而，《嫌疑犯 X 的獻身》所包含的數學元素與數學本質，遠超過一般的推理小說。就我個人的觀點，這本書本身就是一個數學命題的證明。「利用已知事證，證明靖子為殺人犯。」就像我們在作數學證明題一般，利用已知條件，一步步推理得到結論。例如，發現屍體以及身份證明，進一步找上關係人靖子母女，再查證她們不在場證明等等。而本書更高明的是，利用石神這個天才數學家的身份，設計了這個數學證明題，讓警方以為他們的問題主要在於瓦解靖子母女的不在場證明。

---

<sup>1</sup> 由於這一系列影集已經拍了相當多的內容（拉斯維加斯 9 季、邁阿密 8 季、紐約 6 季），因此漸漸的不再加入理工知識內容了）。

在本書中，藉由石神和湯川的對話，讓許多的數學以及學習數學的本質問題一一浮現，並把這些數學本質上的問題，巧妙地融入書中的解謎活動中。例如，石神和湯川久別後再相聚時，湯川拿著一篇反證黎曼猜想的論文給石神檢查時，帶出這個問題：「對於數學問題，自己想出答案，和確認別人說的答案是否正確，哪一種比較簡單或是困難到何種程度？」東野讓這一個問題與整本書的主軸緊密的結合在一起，他在書中藉由石神這個數學家提到：

數學很像尋寶，必須先看清該從哪一點進攻，思索通往解答的挖掘路徑，然後按照計畫逐步擬定數式，得到線索。如果什麼都沒得到，就得更改路線。只要這樣埋頭苦幹，有耐心、但卻大膽地走下去，最後就能找到從未被人發掘過的寶藏——也就是正確解答。

如果用這個比喻，那麼檢證別人的解法，就好像只是沿著別人挖掘的路徑前進，感覺上似乎很簡單，但是實際上並非如此，如果沿著錯誤路線前進，找到假寶藏作出某種結論，有時要證明那個寶藏是假的，會比尋找真正的寶藏更困難。

再者，東野利用石神的數學教師身份，藉由石神在學校出的數學考題，點出本書所設計的謎，來自於我們學習數學時的一個完成重要成就時的突破點。它在於我們能否突破自身自以為是的盲點。石神對草薙說他的考題通常針對一般人自以為是的盲點出題，以為是個幾何問題而拼命朝那個方向解題，然而，其實是個函數問題；同樣利用這一點，石神出給警方的問題，也是針對警方自以為是的盲點，看到有身份證明的屍體（但五官被毀），就以為一定是證件所顯示的那個人，而拼命去想如何瓦解關係人的不在場證明，因而走岔了證明路徑，使得石神設想的完美犯罪可能得以實現。另外，在此書最後，石神向警方提出一個解答，即是自首，連犯罪動機、凶器什麼的都一一供出，再留給警方去判斷他提出的這個答案是否正確，同樣扣緊了這樣的數學本質。

另外一本根據數學概念而寫成的推理小說為吉耶摩·馬汀涅茲的《牛津殺人規則》(Crímenes Impercetibles)。<sup>2</sup>作者馬汀涅茲於1962年在阿根廷出生，擁有數學科學博士學位，曾在英國牛津大學做過短期研究，現任教於布宜諾斯艾利斯大學。本書以一位到牛津進修數學的阿根廷青年作第一人稱敘述。青年某天在家門口碰到一位備受尊敬的數學教授塞爾登，他宣稱收到一張紙條，上面寫著青年房東太太的地址、時間與「序列第一項」的字條，因而到此察看，二人發現房東太太被謀殺了。伴隨著寫有「序列第二項」與「序列第三項」字條的出現，也陸續發現了第二樁與第三樁謀殺案件。整本書的情節與結構與一般的推理小說無異，就是發生了謀殺案，想辦法找出兇手而已，情節相當簡單，然而序列與謀殺案之間有何關係？在刑事偵察的推理劇中，兇手留有字條通常暗示著會有一系列

---

<sup>2</sup> 《牛津殺人規則》(Crímenes Impercetibles)，大塊文化出版，2007年。

的案件發生，而警方則會請專家對字條進行嫌疑犯的心理剖析，警方通常會急於知道序列的選擇與謀殺案被害者的選擇是否有關？要解決謀殺案是否要先知道序列的下一項才行？

隨著謀殺案件的發生與對序列的討論，作者的意圖慢慢的顯現出來。在書中出現的序列第一項為一個圓圈，是數字 0 還是字母 O 不曉得，所以，作者藉由數學教授塞爾登開始說明「序列」的接續原則在數學上的意義。序列符號的解讀在第一項時會碰到一個問題：即是解讀的背景脈絡。因為只有一項，所以應該純粹以圖形的觀點來考量？還是放在語意的層面上考量？就好像單一件謀殺案發生時，刑事偵察要從哪方面考量犯罪動機一樣，是情殺？還是金錢糾紛？序列的不確定性，就好像系列謀殺案中被害者選擇的不確定一般。

然而，當我們在作數列的教學或評量時，給了數列的第一項、第二項、第三項之後，總期望學生能夠依此瞭解這個數列的規則，並依照這樣的規則找出下一項。但是，作者藉由一位自殘成植物人的邏輯數列編造者的例子，生動地讓讀者瞭解維特根斯坦的「有限規則的弔詭」，以及序列接續的不確定性。例如數列「2, 4, 8」下一項應該是什麼？大多數人會回答 16，但是，實際上也可以是其他的答案，只是由複雜許多的規則所造成。<sup>3</sup>我們總能找到一個規則、一個解釋讓你能用任何數當成此數列的第四項。因此，序列的接續幾乎是不可能的，答對下一項也只是因為你的答案剛好就是出題者所設想的答案而已。

隨著序列第二項（二條直立短括弧構成的魚形，如  $\subset$ ）、第三項（三角形）陸續的出現，這個序列所在的背景脈絡似乎慢慢清楚了。原來謀殺犯利用了畢達哥拉斯學派所用的符號來當序列：

圓圈是「一」，在完美之中的統一，...，一切事物的開始，涵容、完備於自身的界線中。「二」是倍增的象徵，是一切對立與二元的符號，帶入了存有。它是由兩個圓交錯而成，夾在中央狀似杏仁的橢圓形...。「三」，三合 (triad)，是兩個極端的結合，是為歧異帶來秩序與和諧的可能性。它是將凡俗與不朽擁抱在單一整體中。

...「一」是點，「二」是連接兩點的直線，「三」則是三角，同時也是平面。

任何人只要瞭解犯人所使用的序列脈絡，自然就可猜到下一項應該是代表「四」的符號「四元體  $\cdot\cdot\cdot\cdot$ 」，這個符號是畢氏學派的徽記，那十個點即是一加二加三加四的和，代表物質與四大元素。然而知道序列的下一項之後，對知道何人

---

<sup>3</sup> 例如可以找一個 3 次多項式，滿足  $f(1)=2, f(2)=4, f(3)=8$ ，求  $f(4)$ 。當此多項式的常數項找到數不一樣時，就會得到不同的  $f(4)$ 。有關序列接續規則的不確定性，可參考單維章教授在《科學月刊》480 期（2009 年 12 月）的文章〈數學「標準答案」〉。

為兇手並沒有幫助。作者在此安排了一個戲劇化的轉折，同時點出了本書結構上的一個重點——不完備定理。

當系列謀殺案的情節公布之後，誰會接續下去犯下一樁類似的案件？可能是原犯，也可能只是模仿犯而已，因此，也會有無法捉到原系列謀殺案犯人的情況發生。在此書中，有另一人瞭解這個序列接續的原則，將此序列伴隨發生的謀殺案當成是上天給的徵兆，允許他接續下去犯下一樁死了十人的謀殺案，警方以為結案了，然而，原本的犯人卻也消失在人海中。刑事的偵察如同數學的證明一樣，有些數學命題偏偏無法在同一個系統裡，證明其真偽。

本書的作者同樣察覺到數學證明與刑事偵察的類似，因此，他以探長辦案來暗喻一般數學真理的證明。「真理與真理中能被證明的部分有所不同」，所以，在蒐集了許多實質與間接的證據之後，有時候還是沒有足夠的證據來證明某個嫌犯有罪。如同哥爾德的不完備性定理所揭示的，數學中也會發生這樣的情況。他還以我們求圓面積常使用的內切多邊形的逼近方法來隱喻對真相、真理的追求：

他把真相比擬為圓周，而人類企圖用一系列的內切多邊形來逼近它，邊的數目越多，就會越趨近於圓。這是個樂觀的隱喻，因為這些連續的階段能讓人感知道最後的圖形。

然而，真相如果像一個不規則的圖形，周邊有許多尖角和缺口，當我們試圖以多邊形的方式去逼近這個圖形時，每一次的新嘗試都會斷裂成更多的尖角和缺口，就是無法獲得一個最終的圖形。作者又再一次的連結到哥爾德的不完備性定理與刑事偵察上。

在本書中作者還藉由數學「時事」增加一點懸疑性。他讓安德魯·懷爾斯對費瑪最後定理證明的那一天，成為謀殺案可能發生的時間點，也以讓懷爾斯成為可能的受害者，來增加環繞著畢氏學派的神秘性氛圍。不過，由於此書在 2003 年出版，稍有數學背景的人都知道懷爾斯成功證明了費瑪最後定理，因此，作者想增加的懸疑性並沒有產生什麼作用。另外，本書中以阿根廷青年為第一人稱，此青年在書中沒有名字出現，我覺得作者似乎想要以此青年在書中旁觀者的角色，來比喻成在浩瀚的數學證明過程中，各個數學家的角色一般，對數學真理所包含的知識內容沒什麼可置喙的，不過是個參與推理的旁觀者而已。

### 3. 利用數學知識解決案件

利用數學知識來解決刑事案件，最著名的當屬《數字搜查線》(numb3rs) 這個影集了。《數字搜查線》(numb3rs) 為美國 CBS 電視台的一個影集，於 2005



年 1 月開始播出，目前在美國正在播出第六季。<sup>4</sup>此影集由 Nicolas Falacci 與 Cheryl Heuton 創作，並且由好萊塢的電影大導演史考特兄弟執導。<sup>5</sup>本影集的主人翁亦為一對兄弟，哥哥是 FBI 探員，弟弟是加州理工大學的天才數學教授。影集的一開始通常是一個案件的發生，而解決案件的關鍵則是弟弟利用數學知識所設計出來的模型或程式。

在這個影集開始播出的第一季中，片頭會強調「數字」無所不在，可以用來預測天氣、分析股市...等等，而第一季第一集就是利用數學來分析 FBI 收集到的資訊，進一步預測出謀殺犯居住地的「熱區」；在第一季中還有一集利用平面與圓錐的截痕為橢圓，進一步推測出大樓是傾斜的；另外，第四季中還有一集與犯人有關的資訊是斐波那契數列。這幾集的內容所涉及到的數學知識，都是我們在數學課程中較容易引入的，其他所牽涉到的數學知識大都如賽局理論、資料分析等等，屬於太過高深的數學與應用數學領域，並不是那麼容易讓人瞭解。

這個影集雖然標榜利用數學知識來解決案件，但是，為顧及一般普羅大眾收視的理解力，當然不可能有太深奧的數學理論出現，不過，內容中又必須解釋所利用到的數學知識「概念」，因此，每集中都會利用電腦做成的特效，來解釋這些數學概念。我覺得這是這個影集最成功的一點。確實，一般觀眾收視的影集，不可能秀出真正所用到的硬梆梆的數學知識，只要讓觀眾有這樣的數學概念——數學能做什麼，就可達到普及一般大眾的任務了。

## 五、數學 VS 敘事：對數學教育的影響與啟發

多夏狄斯在前引的那篇文章中，將「數學」的知識活動分成四類：關注內在的數學 (the endomathematical way)、與外在互動的數學 (the exomathematical way)、實驗數學 (experimental mathematics) 與準數學 (paramathematics)。「準數學」為他所創的一個新詞，這他認為個領域從一種特殊的觀點來學習數學的歷史與傳記，這種觀點結合了認知論與修辭兩方面。在認知方面關注於特殊的數學「故事」如何和為何發展成如此；而修辭方面著重在讓它被瞭解得更好，以滿足數學教育的需求。他認為此領域中一種可行的學習數學的方式，即是以「說故事」(storytelling) 的型態來進行。他提出在數學中說故事的主要特徵為具體化與合理性，分成三個層次：

- (1). 在計算與演繹推理的層次，故事只能當成解釋的工具。
- (2). 在「策略」的層次，對於論述的結構，以及策略的瞭解，故事形式通常

---

<sup>4</sup> 台灣在 AXN 頻道播出，已播畢第 5 季。

<sup>5</sup> 哥哥雷利史考特 (Ridley Scott) 即是《神鬼戰士》與《黑鷹計畫》的導演；弟弟東尼 (Tony) 為丹佐華盛頓主演的《時空線索》(Déjà Vu) 的導演。

是更適切的。

(3). 在歷史-傳記-認知的層次，故事形式佔有相當的優勢。

在數學學習中以「說故事」的形式學習，一個最大的優勢在於故事可以傳達價值觀，這是傳統的數學學習方式容易忽略或是較不容易達成的部分。

傳統的數學學習方式容易讓學習者覺得數學是中立的、冰冷的，因此，學習者不容易燃起對數學學習的熱情與認同感，透過敘事的形式，反而容易將要傳達的數學「精神」與概念包裝在故事中，讓學習者在輕鬆的心態下，自然地吸收所要傳達的價值觀。而推理劇的敘事形式，除了有以上優勢之外，更容易增進視聽者對法律推理邏輯的瞭解，將理性的數學知識與深受人類感情影響的刑事案件連結在一起，進而啟發對數學的興趣，或是反之對刑事偵察的瞭解與興趣亦可。選擇適當的推理劇題材，不僅學到數學知識或概念，以滿足數學學習的認知面向，更可以為秩序、有條理的數學學習，帶來一點懸疑、緊張的氣氛。

## 參考文獻

Doxiadis, A. (2004). "The Mystery of the Black Knight's Noetherian Ring", A keynote address of the Fields Symposium on *Online mathematical investigation as a narrative experience*.

Polya, G. (2006). 《怎樣解題》，蔡坤憲譯。台北：天下文化。

洪萬生、林芳玫 (2009). 〈數學與敘事在教育上的應用：以通識教育和 HPM 為例〉，《HPM 通訊》12(11).

東野圭吾 (2006). 《嫌疑犯 X 的獻身》，劉子倩譯。台北：獨步文化。

馬丁涅茲，吉耶摩 (2007). 《牛津殺人規則》(孫梅君譯)。台北：大塊文化。