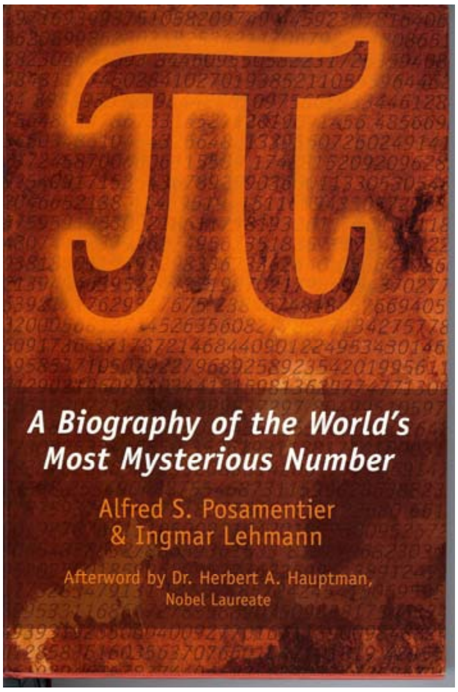
真 π 不怕火來煉：又一本有關 π 的故事

洪萬生
台灣師範大學數學系

書名：**π: A Biography of the World's Most Mysterious Number**
作者：**Alfred S. Posamentier & Ingmar Lehmann**
出版社：**Prometheus Books, New York**
出版資料：**324 pp**，精裝
出版年：**2004**
ISBN: 1-59102-200-2



一、前言

在《**π 的歷史**》(***The History of*** *π*, 作者 **Peter Beckmann**) 與 《**π 的傳奇**》(***The Joy of*****π**,作者 **David Blatner**) 之外，兩位作者與出版社還有膽識出版這第三本有關 **π** 的傳記，真是令人佩服！

本書除了序言和結語之外，共有 **7** 章，其單元主題依序如下：

1. What Is π?
2. The History of π
3. Calculating the Value ofπ
4. π Enthusiasts
5. π Curiosities
6. Applications of π

7. Paradox in π

從數學普及書籍的標準來看，本書之風格與體例近於《**π 的傳奇**》一書，尤其在結語章中，作者更是引錄了 **π** 的 **10** 萬位小數，足以挑戰好背成癡的書蟲。不過，在敘述方面，卻完全不避數學知識的論證與推演，儘管那些主要止於微積分的極限概念而已。或許由於本書第一位作者 **Alfred S. Posamentier** 是紐約城市大學 **(CUNY)** 的數學教育教授，因此，本書的呈現手法相當呼應優秀數學普及作品所必備的認知需求，大大地顛覆了美國出版界的刻板印象：在一本科普書籍中只要印上一個方程式或數學公式，就會少賣 **5000** 本！因此，本書非常值得推薦，當然也非常值得翻譯成中文，讓國內中小學師生可以同時受惠！

二、內容簡介

在第 **1** 章〈何謂 π ？〉**(What Is** π **?)** 中，作者指出本書主旨是理解 π 及其某些最漂亮的風貌。一開始，在引進 π 時，作者針對與 π 有關的兩個公式：$2\pi r$ 與 πr^2，並特別提及 πr^2 的英文「唸法」: **"Pie are square."** 所引來的一個戲謔回答：**"No, pie are round."** 此外，作者還指出日曆上的 π 日：**3** 月 **14** 日，而這也巧合了愛因斯坦的生日（他生於 **1879** 年 **3** 月 **14** 日）！

上述這些插曲，都是引進 π 的極佳情境。事實上，本章內容除了上述之外，其他各節還包括〈符號 π 〉、〈 π 的回憶〉、〈圓面積公式〉、〈方與圓〉、〈 π 值〉、〈 π 的新奇〉、〈 π 值的歷史演化〉、〈磨光 π 的直觀〉、〈聖經裡的 π 〉、〈數學中的符號 π 怎麼來的？〉、〈歐拉〉、〈 π 的一個悖論〉、〈 π 的立法〉，以及〈機率論中的 π 〉。這些材料對於愛好閱讀數學普及書籍的讀者來說，都不是新鮮事，不過，作者介紹時總是著重數學知識的內容與趣味之折衷，同時，各節篇幅大都不長，一般讀者閱讀時壓力應該不致於太大才是。其實，作者在論述時，已經盡可能將一些必備的數學知識置入腳注 **(footnote)**，避免影響行文的流暢。

在第 **2** 章〈 π 的歷史〉中，作者相當簡要地敘述了有關 π 的歷史演化，除了提及 π 的近似值估計之外，也附帶說明相關的數學理論，譬如公元前古希臘的成就、歐幾里得乃至於阿基米德的貢獻，都呈現得通俗易解。此外，作者對於 **18**、**19** 世紀歐拉、高斯以及林德曼 **(Carl Louis Ferdinand Lindemann, 1852-1939)** 對於 π 的估算及其本質之研究，作者也提供了合宜的說明。至於二十世紀，則表揚印度天才數學家拉馬努江 **(Srinivasa Ramanujan, 1882-1920)** 的特殊心算才能，以及電算機介入 π 值的估計，作者當然不會放過。在本章中，他們提供了截至 **2002** 年 **9** 月爲止，由東京大學團隊所完成的近似值 **1,241,100,000,000** 位小數。

雖然從科技新知觀點來說，人類追求 π 的新估計值，已經不得不仰賴電算機，然而，從數學普及觀點來說，針對一般讀者提供幾個古典的估計方法，可能還是深具意義。其實，這也是作者在第 **3** 章所採取的進路。在本章中，作者首先介紹阿基米德的圓內接、圓外切正多邊形逼近法（一直到正 **96** 邊形），而且爲了方便論述，他們利用了現代的三角學知識的便利－不過，他們誤以爲阿基米德也曾採用三角函數。緊接著，他們介紹中世紀著名學者尼可·庫薩 **(Nicholas of Cusa, 1401-1464)** 的有趣方法－先給定一正方形，再考慮其內接與外切正方形。

值得注意的，中世紀的尼可所以對此一問題發生興趣，乃是源自「化圓爲方」**(Squaring the circle)** 的尺規作圖問題。還有，本章也介紹了諸如計算圓內正方形個數之直觀法、高斯所曾使用的計算格子點之方法、（顯然是模仿阿基米德的）比較圓及其外切正方形之重量的物理方法、機率論的蒙地卡羅法 **(The Monte-Carlo Method)**，以及運用π的無窮級數展開式如萊布尼茲級數、歐拉級數，與天才拉馬努江的幾個級數，來計算近似值。

第 **4** 章主題爲〈π的狂熱份子〉**(π Enthusiasts)**，收集了一般讀者最容易視爲博雅談助的內容，譬如前面曾提及的π日、各種語言的π之背誦法、π的小數位的可能類型或模式，以及一首π歌等等。

第 **5** 章主題爲〈π之驚奇處〉**(π Curiosities)**，也是值得博雅稱頌的內容。這些令人驚奇的π之性質，譬如π的小數位第 **359-361** 位數恰爲 **360**、π的第 **7**、**22**、**113**、**355** 小數位都等於 **2**，而 **22/7** 和 **355/113** 則是π的兩個重要的近似值，前者被中國南北朝數學家祖沖之稱爲「約率」，後者則被稱爲「密率」。此外，本章還包括一些特殊的數與π近似值的關係，π的連分數展開式（特別是其「近似分數」(本書稱 **convergent**) **22/7** 與 **355/113** 之論述）。另一方面，本章也提及如何利用π以估計河流之長度。

第 **6** 章介紹π的應用。作者所介紹的例證絕大部分與圓形有關，而且都可運用簡單的平面幾何知識處理。其中比較有趣的問題，當屬如何等分一塊披薩給三個人，以及π如何幫助吾人計算$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}}$ ：$(\sqrt{-1})^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \doteq 0.207879576351\ldots$。

第 **7** 章主題爲與π有關的悖論 **(paradox)**，作者書寫進路乃是延續前此之驚奇呈現，與古希臘所謂的「悖論」概念並不完全相符。儘管如此，本章所呈現的驚奇的確相當令人匪夷所思，尤其是同心圓的周長之比較，更是叫人稱奇。作者也充分地運用相似正多邊形的周長比較，來說明此一很難直觀得到的事實。

三、評論

在有關π的數學普及書籍中，本書堪稱是最能提供數學的論證與認知的一部作品。換句話說，經由本書之閱讀，讀者不僅可以充分領會有關π的博雅趣味，而且也可以接觸真實的數學知識，這在美國出版界，也是相當罕見！

此外，本書作者敘事流暢，選材活潑，再配合合宜的數學洞察力，因而得以在有關π的普及讀物中，另樹一幟。因此，本書當然值得高度推薦！

不過，本書也有一些值得商榷或訂正之處，我們必須在此指出，供讀者參考借鑑。首先，本書針對中世紀歐洲有所謂 **Dark Ages** 之說，此一用詞由於價值判斷強烈，目前在史家社群已極爲少見，應該避免使用。其次，祖沖之的羅馬拼音並不一致 **(**見 **pp. 75, 61, 149**），顯見作者再參考引用有關中算史的論述時，未曾深入確認史實。此一不足也見諸於作者對於誰發現了 **355/113** 的相互矛盾引述**(**見 **pp. 115, 149)**，其實根據迄今史料所載，第五世紀的中國數學家祖沖之，應該是最早發現者！

這些當然反映作者並不十分熟悉數學史實，尤其是中算史的相關論述－在這一方面，作者僅引述 **David Smith** 的 ***History of Mathematics***，**H. Eves** 的 ***An Introduction to the History of Mathematics*** 以及 **Alexei Volkov**（琅元）的論文 **"Calculation of π in ancient China"**。類似的不足，也見諸於阿基米德採用正六邊形作爲 π 逼近的起點 **(p. 81)**，以及阿基米德使用三角函數 **(pp. 81-91, 99)** 等等說法。以上這些當然都是些無傷大雅的缺陷，然而，以目前可靠資訊的可及性，作者或編輯其實很容易避免，因此，本書再版時應該設法訂正。

優秀數學科普作品指標

指標以五顆星☆☆☆☆☆爲最高品質。

1. 知識的實質內容 (Intellectual substance of knowledge)

(1) 認識論面向 (Epistemological aspect) ☆☆☆☆
有關概念發生 **(genesis)** 與發展 **(development)** 過程之啓發。

(2) 方法論面向 ☆☆☆☆
譬如：同一方法可「同時」導致發現 **(discover)** 並用以核證 **(justify)**，從而充滿著說明 **(explain)** 的功能。

(3) 歷史或演化面向 (Historical or evolutionary aspect) ☆☆☆
凸顯數學知識的演化面向，強調數學成長的歷史意義。

(4) 哲學面向 (Philosophical aspect) 不適用
包含數學知識的本質，譬如柏拉圖主義 **(Platonism)**、擬經驗論 **(quasi-empiricism)**、建構主義 **(constructivism)** 等主張之討論。

(5) 教育改革面向 (Education reform aspect) ☆☆
譬如改革議題、人格成長之啓發。

2. 形式或表達 (Form or representation)

(1) 創新手法 (Innovative approach: new story on old stuffs) ☆☆☆
譬如，在舊題材上，說一個新的故事。

(2) 數學知識的洞察力（或洞識）(Insight into mathematical knowledge: inspiring and revealing) ☆☆☆☆
數學感，對數學知識有深刻的領悟。

(3) 歷史事實的洞察力（或洞識）(Historical insight or a sense of history) ☆☆
譬如：能不能體會歷史發展之意義？

(4) 異文化的啟蒙意義 (Enlightening in cultural mathematics) ☆☆
譬如：有關非西方主流數學發展之意義。

(5) 忠實可靠的參考文獻 (Integrity with references) ☆
譬如：參考文獻與資料是否合宜，是否引用即時而不過時文獻？（如 **E. T. Bell** 的《大數學家》）

(6) 敘事的趣味性、可及性與一貫性 (Narrative in an interesting, accessible and coherent way) ☆☆☆☆
譬如：會不會說故事？數學洞識與歷史洞察如何有機地結合？

3. 內容與形式如何平衡 (Balance in Content vs. Form)

(1) 青少年層次 (for adolescence) ☆☆☆

(2) 一般社會大眾 (for general public) ☆☆☆

(3) 兒童層次 (for kids)

4. 摘錄本書最精彩片段 (excerpt from the most exciting passage)：

（下引三段文字是本書中有關兩個相似正多邊形周長之比較。）

Notices how the value of *a*, the distance of the 1-meter-length-ended rope from the regular polygon, increases as the number of sides of the regular polygon increases. What would you expect will be the maximum value of *a*? The maximum number of sides for a regular polygon could be considered a polygon that is like a circle. So we would expect that *a* will get gradually larger until it reaches the value we had for the circle, about 15.9centimeters.

The greater the number of sides of the regular polygon, the larger the distance, a, that separates the two similar polygons. Does *a* increases infinitely? Of course, this distance, a, can never become larger than that for *a* circle.

As the number of sides, *n*, gets infinitely larger, we obtain for the perimeter in this case the circumference of a circle) the limiting value *C*=2*r*.
Now π reappears again. (p. 233)