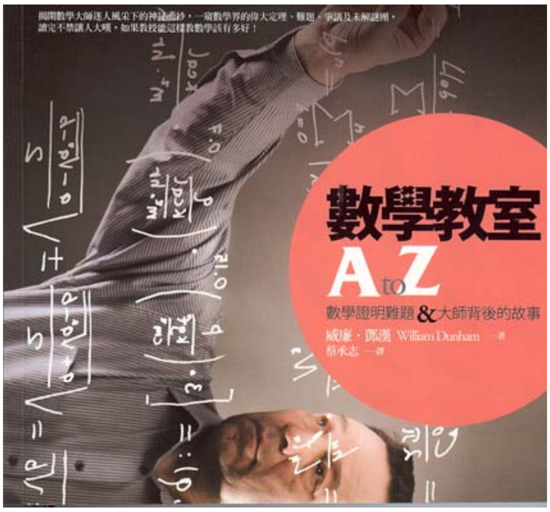
《數學教室 A to Z》
—數學證明難題&大師背後的故事

台灣師大數學系研究生　黃俊瑋

書名：數學教室 **A to Z** (***The Mathematical Universe: An Alphabetical Journey through the Great Proofs, Problems, and Personalities***)
作者：威廉・鄧漢 **(William Dunham)**
譯者：蔡承志
出版社：商周出版社，台北
出版年：**2009**
出版資料：平裝共**331**頁，定價 **360**元
國際書碼：**ISBN 986-6369-41-4**



一、內容簡介

相信一般人在求學時期一定有過從 **A** 到 **Z**，聯想出相關的英文單字或者認識新英文單字的經驗。藉由這樣的巧思，從 **A** 到 **Z** 來帶領大家認識數學、瞭解數學發展，則是本書的主旨。

《數學教室 **A to Z**》是威廉・鄧漢在《天才之旅》(***Journey through Genius*, 1990**) 之後的數學普及力作。從本書所獲得之美國出版協會最佳數學圖書獎、美國亞馬遜數學參考數類 **TOP100**、英國亞馬遜五顆星推薦等，不難看出其在英美各國受歡迎之程度。

作者將本書分成 **A** 到 **Z** 共二十五個章節，[1]其中，各個章節的題名，則分別為以 **A** 到 **Z** 為字首的二十五個主題，從而依據主題自由發揮，並連結有關的重

[1] X 與 Y 合併為 X-Y 平面一個章節。

要數學內容。作者在這短短二十五個章節的篇幅之中，試圖盡可能地容納各個重要的數學問題、數學分支、數學概念以及著名的數學家。

首先，我們先來瞧瞧，哪些重要主題得到作者的青睞。在此，依據 **A** 到 **Z** 的順序列出題名，以及其中介紹之人物、重要數學概念與問題如下：

各章節主題	介紹之人物或軼事	重要之數學概念與問題
算術 **(Arithmetic)**	梅森 **(Mersenne)** 柯爾 **(Cole)** 埃爾迪什 **(Erdos)**	質數與合數、算術基本定理、梅森數、歸謬法、反證法、平方數有無限多個質數有無限多個。
伯努利試驗 **(Bernoulli Trials)**	伯努利家族 **(Bernoulli)**	伯努利試驗之概念與相關應用。
圓 **(Circle)**	阿基米德 **(Archimedes)** 楚諾維斯基兄弟 **(Chudnovsky)**	圓周率π、求π之近似值。
微分 **(Differential calculus)**	牛頓 **(Newton)** 萊布尼茲 **(Leibniz)**	微積分之起源、斜率、切線與微分。
歐拉 **(Euler)**	歐拉 **(Euler)**	親和數、三角形之歐拉線性質、無窮級數、正整數分解成相異正整數問題。
費馬 **(Fermat)**	費馬 **(Fermat)**	解析幾何、形如**4k + 3**之奇數，無法寫成兩完全平方數之和、費馬最後定理。
希臘幾何學 **(Greek Geometry)**	泰勒斯 **(Thales)** 歐基（幾）里德（得） **(Euclid)**	《幾何原本》之部份設準、共有概念與定理、幾何原本第一冊前**20**個命題之中的部份命題。
斜邊 **(Hypotenuse)**	盧米斯 **(Loomis)**	畢氏定理、中國弦圖、比例證法、加非爾德之梯形面積等證法。
等周問題 **(Isoperimetric problem)**	芝諾多羅斯	等周問題、全等正多邊形鋪滿平面命題。
辯證 **(Justification)**	羅素 **(Russell)**	證明的意義。
封爵的牛頓 **(Knighted Newton)**	牛頓 **(Newton)**	牛頓法逼近方程式的根。

被人遺忘的萊布尼茲 **(Lost Leibniz)**	萊布尼茲 **(Leibniz)**	積分與面積、微積分基本定理。
數學人物 **(Mathematical Personality)**	波利亞 **(Polya)**	數學家的外在特質與形象。
自然對數 **(Natural Logarithm)**	歐拉 **(Euler)**	**e**與自然對數、e^x的展開式、**e**與利息之計算、羅吉斯模型。
數學探源 **(Origins)**		埃及、巴比倫、印度等古文明的早期數學。
質數定理 **(Prime Number Theorem)**	高斯 **(Gauss)**	孿生質數、三重質數、質數定理。
商 **(Quotient)**		有理數與無理數、$\sqrt{2}$是無理數。代數數與超越數、π與**e**的超越性。
羅素悖論 **(Russell's Paradox)**	羅素 **(Russell)**	羅素悖論。
球狀曲面 **(Spherical Surface)**	阿基米德 **(Archimedes)**	球、圓柱、圓錐之相關體積與表面積等問題。
三等分（角）問題 **(Trisection)**	萬澤爾 **(Wantzel)**	尺規作圖三等分角問題
數學的功用 **(Utility)**		數學在各個領域與學科之中的功用。
文氏圖 **(Venn Diagram)**	文恩 **(Venn)**	文氏圖。
女數學家都上哪裡去 **(Where are the Women？)**	希帕蒂亞 **(Hypatia)** 熱爾曼 **(Germain)** 柯瓦列夫斯卡亞 **(Kovalevskii)**	女數學家們在社會中的不公平地位與相關故事。
X – Y平面 **(X - Y Plane)**	笛卡兒 **(Descartes)**	座標系、解析幾何、距離公式。。
複數 **(** 複數**Z)**	卡爾達諾 **(Cardano)**	複數、三次方程式根式解問題、歐拉公式、代數基本定理。

作者選取的主題面向很廣泛，包含重要數學家及其成就之介紹、著名的數學問題、基礎或重要的數學概念，以及對於數學領域之簡介等。然而，受限於篇章

的數目，在主題與人物的選取上，不免有遺珠之憾。其中，我們可以再進一步細分作者所選擇的主要題材如下：

(1) 重要的數學家：歐拉、費馬、牛頓、萊布尼茲。
(2) 偉大的定理：質數定理 **(Prime Number Theorem)**。
(3) 著名的數學問題：等周問題、三等分（角）問題、羅素悖論 **(Russell's Paradox)**。
(4) 數學概念：伯努力試驗、圓、斜邊、自然對數、商、文氏圖、**X - Y**平面、球狀曲面 **(Spherical Surface)**。
(5) 數學領域：算術、微分。
(6) 其他：辯證、數學的功用、數學人物、數學探源、女數學家都上哪裡去？

本書雖名爲「數學教室」，但作者主要是以說故事、輕鬆談天的口吻來寫書，而非傳統教科書式地灌輸數學知識。事實上，作者僅僅在必要介紹之處，才穿插相關的數學內容與數學算式，因此，閱讀時不會帶給讀者太多的知識「壓迫感」。同時，作者所羅列的這些主題之中，大多不涉及太艱深複雜的數學技巧與算式，就數學內容而言，也多屬於基礎的層次，其中除了少數題材涉及了極限與微積分的概念之外，相信一般人只要熟稔高中程度之數論、代數與幾何學之概念，便能輕鬆駕馭本書中的數學內容，亦能從中習得許多課本以外的數學知識。

再者，各個章節之間的內容，多分屬獨立的知識與概念，在閱讀的過程中，不必擔心無法理解部份內容，而影響整體閱讀的流暢性與完整性。同時，讀者也不太須要考慮知識邏輯結構與難易度的編排順序，儘可從中隨性地挑選感興趣的主題來閱讀。因此，本書對於一般讀者而言，就大大地增加了可及性 **(accessibility)**。

還有，正如前述，作者主要以說故事的方式來書寫每一章節，因此，他除了以數學家爲標題的章節之外，在其他的每一章節裡，作者亦會介紹與該數學知識或數學問題相關的數學家，或者是穿插數學家的趣聞軼事。同時，在版權允許的情況之下，本書也提供了多位數學家的肖像，諸如紙鈔、郵票或者畫像等。如此一來，本書除了可激發一般讀者的閱讀興趣之外，對於青少年或者非數學專長的社會大眾而言，即使無法理解其中的某些數學式，相信也可以從本書認識數學家與其重要貢獻，進而瞭解數學史上的一些重要著名問題及其發展，甚至從中獲得啓發。

二、評論

作者為了找出以**A**到**Z**等二十六個字母為字首的主題，勢必在安排與取捨上，花費不少心思。例如「**A**」可以是算術 **(Arithmetic)**，也可以是「代數」**(Algebra)** 又或者也可以選擇「阿基米德」**(Archimedes)**，又或者「**G**」可以選擇希臘幾何學 **(Greek Geometry)**，亦可以「高斯」**(Gauss)** 作為主角等等。然而，又如同其中的「**V**」，因為相關的數學概念或者以名字之字母以**V**為字首的數學家較少，因此，作者便在「**V**」這單元之中選了文氏圖作為主題，然而，文氏圖雖為大家所熟知，但其重要性與故事性並不怎麼突出，也因此，僅花兩面的篇幅來介紹的「**V**」的故事，便顯得有點雞肋。作者若改以「韋達」**(Vieta)** 為主題，並介紹符號代數之起源與發展，或許更為合適也說不定。

另外，諸如「**J**」、「**U**」、「**M**」、「**O**」、「**W**」等故事，或許是因為作者找不到合適的數學概念、數學問題或數學家來冠名，因而，他分別將題名定為：辯證 **(Justification)**、數學的功用 **(Utility)**、數學人物 **(Mathematical Personality)**、數學探源 **(Origins)**、女數學家都上哪裡去？ **(Where are the Women？)** 等較為特殊的主題，同時，其中的內容也討論較廣泛的議題，而非只是介紹某些數學家或數學概念而已。平心而論，除了這些特別的單元之外，本書大部份主題都是一般科普書籍比較老生常談的內容。要如何重新包裝、說個好故事或者讓經常閱讀數學普及書籍的讀者們，有著意外的驚奇，實屬不易。然而，正因作者加入了這些特別的元素如「辦證」、「數學的功用」、「數學人物」、「數學探源」、「女數學家都上哪裡去？」等，不僅豐富了本書的面向，也加深並加廣了所能討論的議題，實在是意外的收穫。不過，受限於篇章的數目，不免仍有諸多的遺珠之憾為未被納入。

本書雖名為「數學教室」，但與傳統數學課程的內容有極大的差異，並未以教授抽象死板的數學知識為主要目的。再者，讀者也不被要求是否能夠實際求解各種數學問題。在多數的篇幅中，數學故事夾雜了數學人物，再從中引出所談之數學內容，而數學內容亦無太多艱澀的概念或算式，作者大多以非技術性的角度，點到為止地解說這些概念。同時，本書就純數學知識的內容而言，密度亦不高，蠻適合多數的青年學生，或者一般非數學專長者閱讀。他們顯然可以從中認識重要數學家與其貢獻，也可瞭解數學概念和數學問題的發展過程，從而擴展數學視野。這對於數學普及教育之推動，以及對比於一般數學教學現場之中，日復一日地趕進度、解題、補充、考試等固定作息，也一定可以提供不一樣的反思。

就讀者分眾而言，本書是以一般青少年與社會大眾之閱讀為取向，因此，對於想從中學得高深數學知識的讀者而言，內容顯然有所不足。同時，作者也避開了微積分以降的數學內容與發展，他所提供的數學知識內容與所介紹的數學家大

都截至十八世紀，只有羅素悖論等少數議題，才是比較晚近的產物，而二十世紀後的幾個重要數學家，也僅再簡略地提到希爾伯特、埃爾迪什 **(Erdos)** 和安德魯・懷爾斯 **(Andrew Wiles)** 的費馬最後定理證明。由於本書原英文版發行於 **1994** 年，因此，它對於懷爾斯解決這個困擾數學家們三百多年的難題的曲折過程，還有最終的拍案定版，都無法在書中呈現。

接下來，我們選取一些主題，來審視作者在一些常見議題中，對於數學知識、數學歷史之洞察力，以及哲學觀。

對於畢氏定理的證明方法，作者參考了盧米斯 **(Loomis)** 之作，[2]在本章之中，給出了弦圖證法、比例證法和美國加菲爾德總統的證明方法，然而對於歐基里德在《幾何原本》之中的的面積證明則支字未提，或許作者是考慮該證法比之其他證明方法的複雜性，卻也無法讓讀者瞭解此證法的重要性以及其與餘弦定理之間的連結[3]。再者，作者在處理希臘幾何學以及《幾何原本》時，點出了「五個設準」是出於假設，還有「共有概念」是不證自明的，也說明了前三個設準之於尺規作圖上的意義，同時談到了《幾何原本》之中如何在命題之中，處理無法將長度轉移的「閉合式圓規」以及「驢橋定理」。不過，對於「平行設準」和平行相關之命題則是支字未提。也未提及尺規作圖之於證明圖形存在性的意義。

對於三等分角問題的處理上，作者也以很妙的例子來比喻：「有幾位希臘幾何學家，引用輔助曲線完成三等分，不過這類曲線並不是以圓規和直尺作出，因此違反遊戲規則。這就很像是搭直升機抵達聖母峰：採用不可接受的作法達到終點。」同時，也點明了尺規作圖必需是在有限個步驟之中完成圖形的建構。作者在本章節之中，也用到了萬澤爾**(Wantzel)**所提出的代數方法，來說明尺規作圖三等分任意角的不可能性。另外，作者還更進一步地為「不可能」三等分任一角之中的「不可能」作註解，打破一些不瞭解數學命題與證明意義的人，對此「不可能」的迷思，最後，也以「尺規做不出三等分作圖[4]，不管怎樣都做不成。本案終結。」作為本章之結語。

在「數學的功用」一章之中，作者在說明數學的實際功用之前，試圖拋出一些哲學與本質上的問題：數學是把常識變得虛無飄渺的學問嗎？自然是否如常言所道，服從數學規則？這種服從特性暗示，外在世界不知道為什麼，總要受數學原理約束。或者說，自然和數學是否展現出表面相仿，就根本上卻毫無關連的行為？數學具備有序特質，是描述世界內在秩序的理想語言，這是不是純屬機緣湊巧？或者無形的數學具備的節律和構造，不過是模擬有形現實的節律和構造，兩

---

[2] 亦即他的 *The Pythagorean Propositions*。這本書當然已經老套了，相信讀者願意義參考 Eli Moar 的 *Pythagorean Theorem 4000 Years!* 林炎全教授已經為我們書寫了本書之評論，詳見本欄。

[3] 可參考 HPM 通訊第 9 卷第 10 期，餘弦定理怎麼教。

[4] 此處為摘錄原譯文。

者並不彼此服從？

早在本章之前的第**N**章，作者便曾以自然對數在投資和利息上的應用，還有統計上相關而應用廣泛的羅吉斯模型，以及以一個員警透過指對數來計算出死者死亡時間，來推斷不在場證明的故事等，說明了數學的實用性。接著本章之中，又再加入測量聖母峰、光速、法老古物等測量空間與時間的例子，說明數學的用途。也以莫里斯．克萊因的斷言：「數學的主要價值，還不在於這門學問能提供哪些東西，而是在於它能輔佐人們鑽研物理世界，取得成果。」和純數學家哈代的評論：「好些基本數學‥具有相當程度的實際用途‥有用的概念，大體上都相當乏味；那只是最不具美感的部份，『真正』數學家的『真正』數學，費馬和歐拉和高斯和阿貝爾和黎曼的數學，幾乎都是完美『無用的』」，來為正反兩派辯駁。然而，最終他還是以伽利略最為我們熟知的一段話來作結：宇宙是一本「偉大的書」，而且「除非先學懂得寫書用的語言，讀通組成語言的字母，否則是無法瞭解的。宇宙之書是用數學的語言寫成的。」這也足顯作者自身的立論與觀點。

至於「辯證」一章，作者以四個主題：**1**、幾件事例不足為證。**2**、愈簡單俞好。**3**、反例有其價值。**4**、你可以證明反面觀點，點出證明的意義與必要性。不過，並未再深入討論證明相關之哲學基礎。此外，他又進一步提出：人類是必要的嗎？質疑電腦是否能接管人類證明的工具。

另外，作者在「女數學家都上哪裡去？」此一單元之中，指出女數學家在數學歷史舞臺上的角色，這也是一般數學普及讀物中，較少涉獵的議題，作者除了介紹一些歷史上的重要女數學家之外，也以「當年大聯盟欠缺黑人選手，並不是肇因於他們的能力低落，而是由於黑人沒有機會打球」，來為「女性沒有能力研究數學」作辯護。這也說明了傳統上，對於女數學家的負面態度、不得接受正規教育以及沒有支助等原因，往往是限制女性數學家們發展的主因。作者並以柯瓦列夫斯卡亞 **(Kovalevskii)** 的生平故事作為主軸，娓娓道盡過去女性在求學與研究數學上，所受之不公平待遇和歧視的眼光，以及儘管這些女數學家才華橫溢，然而卻必須付出的加倍努力與克服困難的過程。

至於 **Z (**複數**)**一單元之中，當然也不能免俗地介紹了歐拉公式：$e^{\pi i}+1=0$，作者指出：「**這是種絕無僅有的式子，原來這個式子，把整個數學界最重要的常數，全部串連起來。這裡不僅只有 1 和 0 擔綱演出，連(第 C 章)的** π **、(第 N 章)的 e 還有 (第 Z 章) 的** $\boldsymbol{i}$**，全都回來聯手謝幕。這是貨真價實的群星會陣容。**」可惜的是，本書之中，未再針對於 **1** 和 **0** 之故事進一步介紹，僅是在「數學探源」一章之中，略提到印度數學家的偉大成就：將 **0** 引進以十為底的記數系統。然而，在該章之中，作者也提到了斐波那契 **(Fibonacci)** 之《算經》(或《計算之書》)，以及他如何將該書的重要概念和「印度- 阿拉伯數字」傳入義大利，乃至歐洲的

這項重要事跡，而非如一般書籍只介紹「斐波那契數列」，而忽略此一重要歷史事件之意義。

至於本書的創作形式與表達上，作者仿照約翰．保羅士 **(John Paulos)** 的《超越數》，其中以**A**到**Z**的形式來表達，在篇章的安排上相當有創意，與一般科普書雜亂地羅列五花八門、各式各樣主題的方式相比，顯得不落俗套。一般讀者也容易為之吸引，再加上作者輕鬆而自然的口氣，慢慢隨著故事或者作者介紹的動線，引出重要的數學家以及相關的重要數學內容。此外，作者所提到的定理，在一般讀者理解能力允許的情況下，也都特別給出證明，並加上幾何圖形來輔助解說。再者，對於歷史上著名的數學家，作者亦設法搜尋其肖像（例如印在紙鈔或郵票上，以及畫像等等），讓數學家的形象更加鮮明，從而相關內容也較顯得親切可讀。

然而，作者以此從**A**到**Z**類似於字典或百科全書式的架構來表達，雖然他盡量在各個章節簡短的篇幅之中，納入相關重要的主題與數學家，但如同前述，他無法完全地關照每一個面向，譬如本書只有較詳細地介紹了阿基米德、牛頓、高斯等三大數學家之中的牛頓之生平故事。此外，重要的數學領域也只能介紹算術、微積分、希臘幾何學和部份篇章所提及之解析幾何，至於微積分發明之後，至近代的分析學的發展與嚴密化，或者代數之起源與精采的發展史等等，皆無法適當呈現。至於數學探源的部份，作者也指示概略地介紹了埃及、巴比倫、印度等古文明的早期數學，中國的數學成就部份則只是點綴而已 － 僅提到幻方與《九章算術》之中的「葛生繞木」問題。至於〈辯證〉一章之中，作者雖然點明了證明的意義與重要，亦無法再以《幾何原本》之架構為例，來就方法論等哲學面向，來說明數學所依賴之基礎。

附錄之中所列之文獻來看，作者在二十五個章節之中，各約參考或援引了 **10 - 20** 篇或更多的文獻，其中也不乏重要的數學史著作。最後，就本書排版與翻譯的部份來看，文字行間留有適當的行距，使得閱讀的過程較不會有壓迫感，同時，圖形的大小適中，圖形、插圖或圖片與文字之間的版面安排上，也相當清爽宜人。者，每一章節的章名部份，都會把英文字母第一個字加大、反白並加上黑底，同時，也在黑底的部份，加上與該章主題或內容相關的符號或公式，這除了更有助於清楚地點出主題或要點，也使得標題更加醒目而美觀。

最後，就本書中譯本之翻譯品質而言，語意表達相當流暢、清新，翻譯的痕跡不深，大大地增加了可讀性。不過，例如第 **9** 頁以及其他章節之中所提到的 **Whole number**，一般在數學書上譯為「正整數」，而作者則以「全數」譯之，容易使一般讀者摸不著頭緒。再來，第 **90** 頁的內文裡，關於《幾何原本》第一冊的第一個定義，作者譯為「**點是不能分割的事物**」，我們則譯為「**點是沒有部份**

的東西」，又或者徐光啓、利瑪竇中譯版的「點者無分」，因爲英文版爲 **“A point is that which has no part.”**。在第 **228** 頁，任何有理數都是「代數」，應改爲「代數數」才對。在第 **268** 頁，「尺規做不出三等分作圖，不管怎樣都做不成。」這一句容易造成混淆，如果譯成「尺規作圖做不出三等分任意角」，會比較清楚，也較合於原意。然而，我們尚未比對原文，無法瞭解到底是原文或翻譯上的問題。至於在第 **198** 頁，提到古巴比倫的記數符號，作者以「**T**」和「**>**」來代替楔形文字，則顯得有些失真。至於，作者並未討論《幾何原本》的第五設準，因此，我們也無法瞭解譯者如何處理整個第五設準，以及其原文之中 **indefinitely** 的翻譯問題。

最後，中譯者將 **“justification”** 譯爲「辯證」也不恰當，這是因爲本章（第 **J** 章）主題爲數學論證，因此，此一英文字應該仿照國內哲學家用法而譯爲「核證」才是。何況，辯證很容易讓一般讀者聯想到（唯物）辯證法 **(dialectics)**，而沖淡了形式推論 **(formal reasoning)** 的價值與意義。

優秀數學科普作品的指標

一、評價方式

指標以五顆星 ☆☆☆☆☆ 爲最高品質。

1. 知識的實質內容 **(Intellectual substance of knowledge)**

- **(1)** 認識論面向 **(Epistemological aspect)** ☆☆☆
- **(2)** 方法論面向 **(Methodological aspect)** ☆☆☆
- **(3)** 歷史或演化面向 **(Historical or evolutionary aspect)** ☆☆☆☆
- **(4)** 哲學面向 **(Philosophical aspect)** ☆☆
- **(5)** 教育改革面向 **(Education reform aspect)** ☆☆
- **(6)** 與自然科學、人文社會乃至生活經驗的連結 **(Connections with natural science, social sciences and humanities as well as daily experiences)** ☆☆☆☆

2. 形式或表達 **(Form or representation)**

- **(1)** 創新手法 **(Innovative approach: new story on old stuffs)** ☆☆☆☆
- **(2)** 數學知識的洞察力（或洞識）**(Insight into mathematical knowledge: inspiring and revealing)** ☆☆☆☆
- **(3)** 歷史事實的洞察力（或洞識）**(Historical insight or a sense of history)** ☆☆☆
- **(4)** 異文化的啓蒙意義 **(Enlightening in cultural mathematics)** ☆☆
- **(5)** 忠實可靠的參考文獻 **(Integrity with references)** ☆☆☆☆
- **(6)** 敘事的趣味性、可及性與一貫性 **(Narrative in an interesting, accessible**

and coherent way) ☆☆☆☆

(7) 中譯本的品質（若需要）**(Quality of Chinese translation version, if needed)** ☆☆☆☆

3. 內容與形式如何平衡 **(Balance in Content vs. Form)**

(1) 青少年層次 **(for adolescence)**： ☆☆☆☆

(2) 一般社會大眾 **(for general public)**：☆☆☆☆

4. 摘錄本書最精彩片段 **(excerpt from the most exciting passage)**：

從雅各·伯努利證明的偉大定理至今，三個世紀過去了。他的原始論證也已經隱退，由更俐落的版本取而代之。……進步原本就是這樣。不過，就如人類一切努力進程，最好能把開路先鋒謹記在心。今天的雷射光碟科技，讓我們聽到絕美錄音音樂，品質遠勝十九世紀留聲機的沙沙聲響；相同道理，現代機率論也大幅精簡伯努利的大數定律。時代後浪推前浪，愛迪生的原始創作已經廢棄，儘管如此，我們對他依然崇敬。伯努利對自己的黃金定理深感自豪，那是實至名歸，就此我們也該對他致上同等的敬意。（節錄自第 **B** 章）

歐拉的研究成果豐碩至極，數學著述帙卷浩繁，令人難以相信。不過，後世敬重他的原因，主要還不是在他的著述數量，而是他的作品之豐、之美，還有洞見幽微的見識。（節錄自第 **E** 章）

或許有人要提出質疑，哪有必要採多種作法來證明相同的結果。這額外證明豈非多餘？

就實用層面來看就實如此。確立定理超過一次，就「邏輯」看來並無此必要。然而，就相同領域觀點重作探索卻有其美學動機。就於某人寫過一首情詩，也不能制止其它情歌作家依樣畫葫蘆，況且他們還採用了不同旋律、不同歌詞，更採用了其它韻腳。相同道理，畢氏定理的種種證明，表現出不同數學旋律和韻腳，而且就算理的是老套主題，也不會就此減損其美感。（節錄自第 **H** 章）

本案開庭，克萊兒的律師引用前述證據，鼓如簧之舌訴請注意「自然律和自然對數律」，由精熟數學的陪審團裁定有罪與否，結果輕鬆勝訴無罪開釋。感謝對數伸張正義。（節錄自第 **N** 章）

0 的故事反映出數學史上眾多事例的典型發展。概念萌芽；修改焠煉、向外散播並流傳後世；隨後還成為跨國數學文化的一環。數學是全世界共同參與，同點自豪的創造發明。（節錄自第 **O** 章）

倘若史迪飛形容無理數籠罩在「一團無窮雲霧」底下的說法正確，那麼超越數似乎就是籠罩在一團代數不可企及的雲霧底下。（節錄自第 **Q** 章）

最後要向 X - Y 平面解析幾何致上敬意，幾何和代數並蒂開花，如今依然是數學界最幸福佳偶。（節錄自第 X - Y 章）

這是種絕無僅有的式子，原來這個式子，把整個數學界最重要的常數，全部串連起來。這裡不僅只有 1 和 0 擔綱演出，連(第 C 章)的 π 、(第 N 章)的 e 還有(第 Z 章)的 *i*，全都回來聯手謝幕。這是貨真價實的群星會陣容。（節錄自第 Z 章）