回應「土地鑑界」問題徵答

台北市立麗山高級中學 彭良禎

【案】本文原載於教育部高中數學學科中心電子報第39期（2009/09），今增補「讀者回應」後，分享於*MTM*台灣數學博物館的「尺規作圖」專欄。

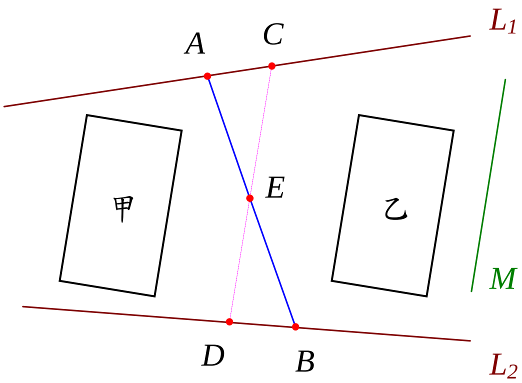
一、 前言

《數學傳播》第 32 卷第 2 期（97/06）曾徵求「土地鑑界」之尺規作法，該題已於同卷第 4 期（97/12）〈徵求最簡答案的回響〉文中，公告八位應答者裡，方法最為「簡潔明白」的張海朝教授的解答，可惜其他徵答的作法卻未同步呈現。筆者於今思得一個國中數學層次之解法，故撰寫本文分享。

二、 尺規作圖

已知：如圖一，三直線 L_1、L_2 及 M 彼此互不平行，點 A、B 分別是 L_1、L_2 上的定點，且 $\overline{AB}$ 與 M 不平行。

求作：分別在 L_1、L_2 上找到定點 C、D（設 $\overline{CD}$ 交 $\overline{AB}$ 於 E 點），使得 $\overline{CD} \parallel M$，且 $\triangle ACE$ 與 $\triangle BDE$ 兩者的面積相等。



（圖一）「土地鑑界」之尺規作圖問題。

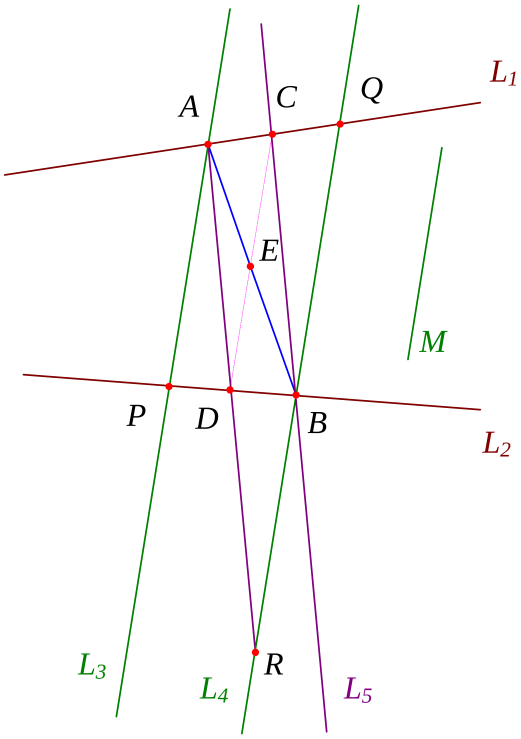
說明：「土地鑑界」為地政事務所的服務項目之一。本題為新竹實驗高中退休教師葉東進所提供，可應用於處理農村常發生的土地交換問題：設有甲、乙兩屋座落在相鄰的兩塊土地上，且其座向皆與M平行，$\overline{AB}$ 原為兩地的界線。今屋主同意要交換土地，使得新界線$\overline{CD}$能與房屋座向平行，且兩塊土地的面積仍保持不變。原題並無要求L_1與L_2不平行，此處將該特殊情況避開，乃因此時E即為$\overline{AB}$的中點，「問題很簡單，不必討論。」

作法：如圖二，

1. 分別過 A、B 作直線 $L_3 \parallel M$、$L_4 \parallel M$，設 L_3 交 L_2 於 P 點、L_4 交 L_1 於 Q 點。
2. 在 L_4 上取一點 R，使得 $\overline{BR} = \sqrt{\overline{AP} \times \overline{BQ}}$（註），且 R 與 Q 位在 L_2 的異側。
3. 連 $\overline{AR}$，設 $\overline{AR}$ 交 L_2 於 D 點。

4. 過 B 作直線 $L_5 \parallel \overline{AR}$，設 L_5 交 L_1 於 C 點。

5. 連 $\overline{CD}$，設 $\overline{CD}$ 交 $\overline{AB}$ 於 E 點，則 $\overline{CD} \parallel M$，且 $\triangle ACE = \triangle BDE$。



（圖二）「土地鑑界」之尺規作圖過程。

註：1.過 B 作直線 $N \perp L_4$。

2.在 N 上，分別於 B 的兩側取點 S、T，使得 $\overline{BS} = \overline{AP}$ 、 $\overline{BT} = \overline{BQ}$ 。

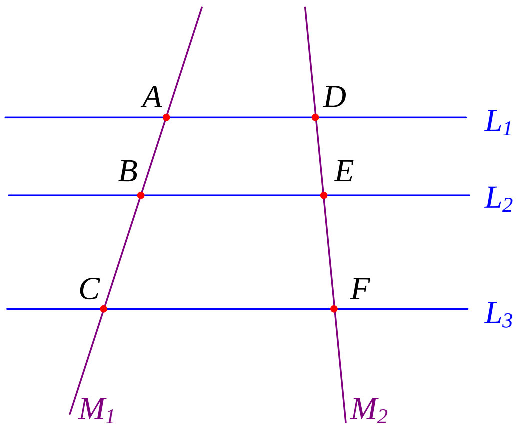
3.以 $\overline{ST}$ 爲直徑畫一圓，交 L_4 於 R 點。

三、 應用原理

（一）平行線截比例線段：

如圖三，直線 L_1、L_2、L_3 分別截直線 M_1、M_2 於點 A、B、C 與 D、E、F，

1. 若 $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$，則 $\overline{AB} : \overline{BC} : \overline{AC} = \overline{DE} : \overline{EF} : \overline{DF}$ 。
2. 若 A 與 D 重合，則 $\triangle ABE \sim \triangle ACF$。

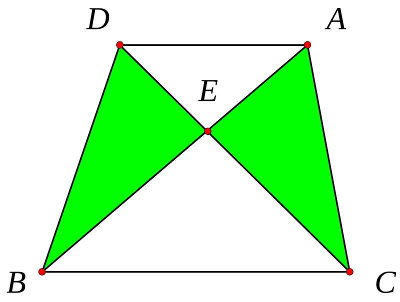


（圖三）平行線截比例線段。

（二）梯形對角線之等面積與相似形切割：

如圖四，梯形 $ADBC$ 的對角線 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 E 點，

1. 等面積：$\overline{AD} \,/\!/\, \overline{BC} \Leftrightarrow \triangle ACE = \triangle DBE$。
2. 相似形：$\overline{AD} \,/\!/\, \overline{BC} \Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle BCE$。



（圖四）梯形之等面積與相似形切割。

四、　思路解析

任取一「動直線」$L \,/\!/\, M$，設 L 分別交 L_1、L_2、$\overline{AB}$ 於 C、D、E 點，若 L 從 L_3 漸漸往 L_4 平移，則△ACE 與△BDE 的面積大小關係，會從△ACE＜△BDE 過渡到△ACE＞△BDE。由應用原理知：當△ACE＝△BDE 時，四邊形 $ACBD$ 恰爲梯形。本題的解題關鍵即是利用此條件推算 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{BE}}$ 之值。

如圖二，作法 1 的目的是先取得固定長 $\overline{AP}$ 與 $\overline{BQ}$。

觀察△ABQ，

$\because\ \overline{CE} \,/\!/\, \overline{BQ}$，

$\therefore \dfrac{\overline{CE}}{\overline{BQ}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{BE}}$ ………（1）。

同理：從△ABP 可得 $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AP}} = \dfrac{\overline{BE}}{\overline{AB}}$ ………（2）。

綜合（1）、（2）兩式可得 $\dfrac{\overline{AP}\times\overline{CE}}{\overline{BQ}\times\overline{DE}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{BE}}$ ………（3）。

又$\because$ 四邊形 ADBC 爲梯形，且 $\overline{AD} \,/\!/\, \overline{BC}$，

$\therefore \dfrac{\overline{DE}}{\overline{CE}} = \dfrac{\overline{AE}}{\overline{BE}}$ ………（4）。

綜合（3）、（4）兩式可得 $\dfrac{\overline{AE}^2}{\overline{BE}^2} = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{BQ}}$，

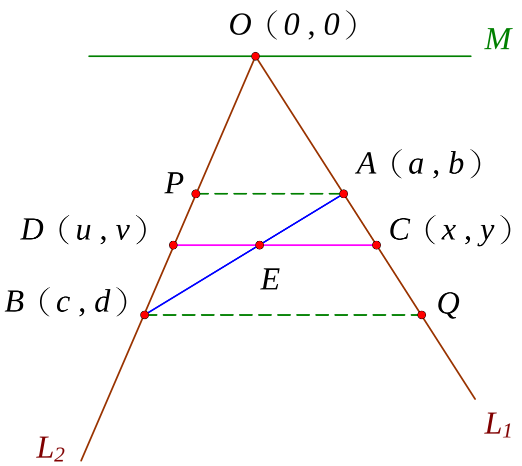
故本題的目標即爲求作 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{BE}} = \dfrac{\sqrt{\overline{AP}}}{\sqrt{\overline{BQ}}}$。

若僅從 $\overline{AP}$ 或 $\overline{BQ}$ 尺規作出 $\sqrt{\overline{AP}}$ 或 $\sqrt{\overline{BQ}}$，則還欠缺很關鍵的單位長「1」，所幸本題要求的只是兩者的比值，故只需技術性將 $\overline{AP}$ 或 $\overline{BQ}$ 視爲單位長，再將

$\dfrac{\sqrt{\overline{AP}}}{\sqrt{\overline{BQ}}}$化爲$\dfrac{\sqrt{\overline{AP}\times\overline{BQ}}}{\overline{BQ}}$或$\dfrac{\overline{AP}}{\sqrt{\overline{AP}\times\overline{BQ}}}$即可。因此，作法 2 至作法 5 的過程，即是透過$\dfrac{\sqrt{\overline{AP}\times\overline{BQ}}}{\overline{BQ}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CQ}}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{BE}}$的關係，陸續確定 D、C、E 點的位置。

五、 後記

如圖五，張教授的簡明之法是先假設直線 L_1 交 L_2 於原點 O，且設直線 M 爲 x 軸，將點 A、B、C、D 座標化之後，再以高中所學三角形面積的行列式計算方法，推導符合$\triangle OAB=\triangle OCD$ 的條件，結果得 $y=\sqrt{bd}$ 。今將張教授的結果繼續推算，得$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{BE}}=\dfrac{\sqrt{bd}-b}{d-\sqrt{bd}}=\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{d}}$。此時再結合筆者尺規作圖的步驟 1，即可推導$\dfrac{b}{d}=\dfrac{d(A,M)}{d(Q,M)}=\dfrac{\overline{AO}}{\overline{QO}}=\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BQ}}$，故筆者的結果與張教授的結論相符。



（圖五）「土地鑑界」之座標化圖解。

「比例式」、「尺規作圖」與「平行線截比例線段、相似形」分別爲現行國中數學七、八、九年級的教材，中學數學課綱雖已將「等比數列與等比級數」從國二移至高一學習，以至於國中生尚未習知「等比中項」，不過，現行教材在「相似形的應用」單元中，都會不約而同地介紹「直角三角形的母子相似性質」，因此，欲以尺規作圖作出$\overline{AP}$與$\overline{BQ}$的幾何平均數$\sqrt{\overline{AP}\times\overline{BQ}}$（此題亦出現在《幾何原本》第 2 卷第 14 題），仍屬國中生可以處理的數學問題。若欲將此題納入國中數學尺規作圖與幾何證明的延伸教材，建議採用葉老師「農村土地鑑界」的情境設計，並給予適當的題組安排，相信會是一趟內容豐富的數學探索之旅。

六、 參考資料

（一）葉東進，〈徵求最簡答案〉，《數學傳播》第 32 卷第 2 期（2008）第 86 頁。

（二）葉東進，〈徵求最簡答案的回響〉，《數學傳播》第 32 卷第 4 期（2008）頁 88-89。

七、 讀者回應

2009 年 9 月 25 日教育部數學學科中心的電子報登載本文後，30 日凌晨，筆者即收到一名讀者的回應，同時提及另一種尺規作法，茲將書信往來及附件內容分享於下：

日期：2009 年 9 月 30 日上午 12:12
主旨：回應彭老師土地鑑界
感謝彭老師精細詳解,
有另一想法如附件（A）,
是敝人粗淺想法,
尚不知是否正確?
忠實讀者敬上

Sent: Wed, 30 Sep 2009 12:37:35 Asia/Taipei
Subject: Re: 回應彭老師土地鑑界
感謝您的分享
您的方法也正確
可用張教授的方法快速檢驗（如附件 B）

Ponpon

日期：2009 年 9 月 30 日下午 5:15
主旨：Re: Re: 回應彭老師土地鑑界
感謝彭老師迅速且嚴謹的印證,
印證結果讓人很開心;
這麼快收到回應更是讓人感到窩心!
非常謝謝您!
忠實讀者敬上

Sent: Fri, 2 Oct 2009 15:28:12 Asia/Taipei
Subject: Re: Re: Re:回應彭老師土地鑑界
謝謝您的肯定
下列 2009MTS 活動歡迎共襄盛舉
中秋考"月"愉快

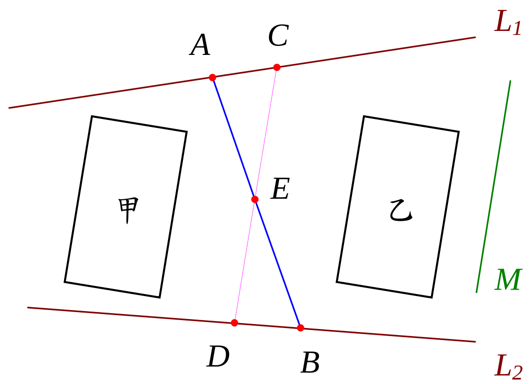
Ponpon

八、 附件

【附件 A】 回應「土地鑑界」問題徵答

已知：如圖一，三直線 L_1、L_2 及 M 彼此互不平行，點 A、B 分別是 L_1、L_2 上的定點，且 $\overline{AB}$ 與 M 不平行。

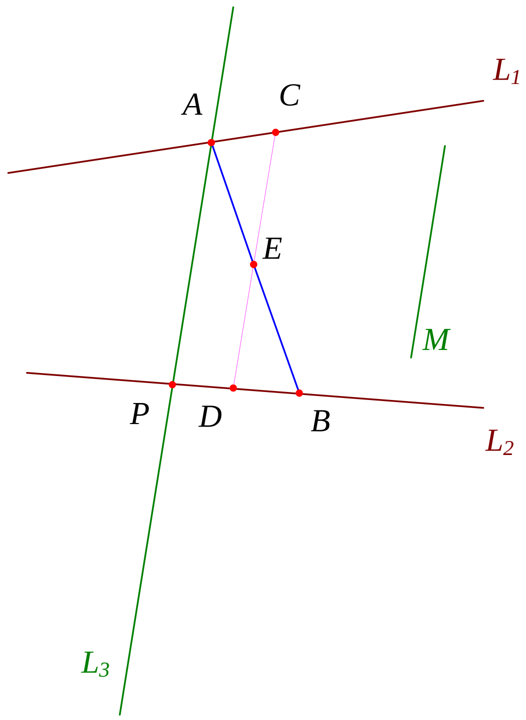
求作：分別在 L_1、L_2 上找到點 C、D（設 $\overline{CD}$ 交 $\overline{AB}$ 於 E 點），使得 $\overline{CD} \parallel M$，且 $\triangle ACE$ 與 $\triangle BDE$ 兩者的面積相等。



（圖一）「土地鑑界」之尺規作圖問題。

作法：如圖二，

1. 過 A 作直線 $L_3 \parallel M$ 交 L_2 於 P 點，又 L_2 交 L_1 於 O 點。
2. 在 L_2 上取一點 D，使得 $\overline{OD} = \sqrt{\overline{OP} \times \overline{OB}}$ 。
3. 過 D 作平行 M 直線交 $\overline{AB}$ 於 E 點，交 L_1 於 C 點，則 $\overline{CD} \parallel M$，且 $\triangle ACE = \triangle BDE$。



（圖二）「土地鑑界」之尺規作圖過程。

【附件 B】

分析：如下圖

過 O 作直線 $L \parallel M$。

分別過 B、P 作 $\overline{BQ} \perp L$、$\overline{PR} \perp L$

此時$\triangle OBQ \sim \triangle OPR$

故$\overline{OB} : \overline{OP} = \overline{BQ} : \overline{PR}$。

而$\overline{BQ}$、$\overline{PR}$即爲張教授方法中的 d 與 b，

設$\overline{OB} : \overline{OP} = \overline{BQ} : \overline{PR} = d : b = dt : bt$

則$\overline{OD} : y = \sqrt{\overline{OP} \times \overline{OB}} : \sqrt{bd} = t$

故以$\overline{OD} = \sqrt{\overline{OP} \times \overline{OB}}$取代張教授方法中的$y = \sqrt{bd}$仍成立。